Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA1102 - 7 Álgebra Lineal

Pseudo Pauta Auxiliar #1: Matrices

Profesora: Natacha Astromujoff
Profesor Auxiliar: Juan Pedro Ross O.

P1. Sean $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrices simétricas.

(a) Muestre que no necesariamente se tiene que AB simétrica.
R: Considerar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Encuentre una condición equivalente a que AB sea simétrica.
R: $(AB)^t = B^t A^t = BA$

(c) Diremos que una matriz $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ es *antisimétrica* si $A^t = -A$.

i) Muestre que $A + A^t$ es simétrica y que $A - A^t$ es antisimétrica.
R: $(A+B)^t = A^t + B^t$

ii) Concluya que toda matriz cuadrada a valores reales se puede escribir como suma de una matriz simétrica y una antisimétrica. ¿Es posible ser simétrica y antisimétrica al mismo tiempo?
R1: $A + A^t + A - A^t = 2A$...
R2: Si $A = A^t$ y $A = -A^t$ entonces $A^t = -A^t$

P2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ tal que $a_{ij} = 1$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre $k \in \mathbb{R}$ tal que $(I - A)^{-1} = I + kA$.
R: Primero veamoslo intuitivamente, notemos que

$$(I + kA) = \begin{pmatrix} 1+k & k & \cdots & k \\ k & 1+k & \cdots & k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \cdots & 1+k \end{pmatrix}$$

mientras que

$$(I - A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$((I + kA)(I - A))_{11} = 0 \cdot (1+k) + -1 \cdot k + -1 \cdot k + ... + -1 \cdot k = -k(n-1),$$

por otro lado

$$((I + kA)(I - A))_{12} = 0 \cdot k + -1\dot{(}1+k) + -1 \cdot k + ... + -1 \cdot k = -1 - k + k(n-2) = -1 - k - k(n-2) = -1 - k(n-1)$$

De esta forma si imponemos que $(I+kA)(I-A)=I$ tendremos que

$$((I+kA)(I-A))_{11}=-k(n-1)=1\wedge((I+kA)(I-A))_{12}=-1-k(n-1)=0$$

lo que se cumple si y solo si $k=\frac{1}{1-n}$. Si uno se fija, intuitivamente ahora al pasar a cualquier elemento de la diagonal debiese ocurrir lo mismo que el 1,1 y cualquier elemento fuera de la digonal se debería comportar como el 1,2. En efecto.

$$((I+kA)(I-A))_{ii}=\sum_k(I+kA)_{ik}(I-A)_{ki}=(I+kA)_{ii}(I-A)_{ii}+\sum_{k\neq i}(I+kA)_{ik}(I-A)_{ki}$$

$$=(1+k)\cdot 0+\sum_{k\neq i}k\cdot -1=-k(n-1)$$

$$((I+kA)(I-A))_{ij}=\sum_k(I+kA)_{ik}(I-A)_{kj}=(I+kA)_{ii}(I-A)_{ij}+(I+kA)_{ij}(I-A)_{jj}+\sum_{j\neq k\neq i}(I+kA)_{ik}(I-A)_{ki}$$

$$=(1+k)\cdot -1+k\cdot 0\sum_{j\neq k\neq i}k\cdot -1=--1-k-k(n-2)=-1-k(n-1)$$

$$\text{Luego si } k=\frac{-1}{n-1},\text{ se cumple que } (I+kA)(I-A))_{ii}=1\wedge(I+kA)(I-A))_{ij}=0$$

$$\therefore (I+\frac{-1}{n-1}A)=(I-A)^{-1}$$

P3. Sea $M\in\mathbb{R}^{m,n}$ una matriz tal que la matriz $(M^tM)\in\mathbb{R}^{n,n}$ es invertible. Definamos la matriz $P\in\mathbb{R}^{m,m}$ como:

$$P=I_m-M(M^tM)^{-1}M^t,$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m.
Pruebe que:

(a) $P^2=P$. Muestre además que $PM=0$, donde $0\in\mathbb{R}^{m,n}$ es la matriz nula.
R1: $P^2=I-M(M^tM)^{-1}M^t-M(M^tM)^{-1}M^t+M(M^tM)^{-1}(M^tM)(M^tM)^{-1}M^t$.
R2: $PM=M-M(M^tM)^{-1}(M^tM)$

(b) P es simétrica.
R: $(A+B)^t=A^t+B^t,(AB)^t=B^tA^t$ y $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}$.

(c) P no es invertible.
R: Si lo fuese entonces podemos aplicarla a $P^2=P$, lo que genera problemas con que $PM=0$ y (M^tM) es invertible.

P4. El uso de matrices es demasiado variado, lamentablemente en este curso no se ven aplicaciones directas pero más adelante se toparán con muchas aplicaciones ya sean en la física, economía, etc. Uno de los problemas más clásicos es la optimización, donde dados dos vectores c y b, y una matriz A se intenta resolver:

$$\min c^tx$$

$$s.a\ Ax\geq b$$

donde $Ax\geq b$ significa que b es mayor o igual que el resultado de Ax en cada coordenada por ej $(1,2)\leq(4,6)$. La gracia es que una vez que el problema se logra escribir de esta manera existen algoritmos que permiten resolverlo de manera bastante simple y eficiente. Por esto es que la idea es que usted plantee el siguiente problema de optimización (no lo resuelva):

Como todo estudiante de Beauchef a usted le interesa aprender mucho, es por eso que en el semestre de primavera tomó los siguientes ramos: Cálculo Estocástico (CE), Topología álgebraica (TE), introducción a la Mecánica Cuántica (MC), estudio de la Filosofía Latinoamericana (FL) y Natación (N). Esto suma un total de 30 créditos, lo que no es para nada poco por lo que debe organizar muy bien su tiempo. Cuando le preguntó a la gente más grande sobre como podría hacerlo con el estudio le recomendaron lo siguiente: tienes que gastar al menos 20 horas a la semana en estudiar dos veces CE y 4 veces TE (parece que es muy difícil ese ramo), además recomiendan invertir mínimo 15 horas en estudiar 5 veces MC y una FL. Además es necesario despejarse! por lo tanto no puedes nadar menos 3 veces a la semana. Por último recuerda que son 30 crédtiso, por lo que no vayas a estudiar menos de 50 horas a la semana. Pero por supuesto seamos realistas usted quiere cumplir todas las recomendaciones pero quiere que la suma de lo que le dedique a cada ramo sea lo mínimo posible (para efectos prácticos dado un ramo siempre invierte el mismo tiempo en estudiarlo) ¿Cuántas horas debe invertir en cada ramo?

R: Escribir la primera restricción de la forma $a_{11}CE + a_{12}TE + a_{13}MC + a_{14}FL + a_{15}N \geq b_1$. Iterar esto con las otras restricciones. De esta forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{41} & \cdots & a_{45} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ $x = \begin{pmatrix} CE \\ TE \\ MC \\ FL \\ N \end{pmatrix}$ y $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$