Solución last Auxilio

P12)

Considere la matriz $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores propios

Sol

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+1\begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] - \left[2-\lambda+1\right]$$

$$+\left[-1 \quad -(2-\lambda)\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 4 - 1\right] - 2 + \lambda - 1$$

$$-1 - 2 + \lambda$$

$$= (2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\lambda + 3\right] - 6 + 2\lambda$$

$$= (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1) + 2\left[\lambda-3\right]$$

$$= \left[\lambda-3\right]\left[(2-\lambda)(\lambda-1) + 2\right]$$

$= [\lambda - 3][2\lambda - 2 - \lambda^2 + \lambda + 2]$

$= [\lambda - 3][3\lambda - \lambda^2]$

$= [\lambda - 3][3 - \lambda]\lambda$

$= -[\lambda - 3]^2 \lambda$

luego

$\lambda = 0$ mult. algebraica 1

$\lambda = 3$ mult. algebraica 2

b) de una base ortonormal de vectores propios de A

Sol

¿como se hace lo anterior?

la forma de hacerlo es estudiar el SEV

$W_\lambda = \ker(A - \lambda I)$ para

cada valor propio.

Si obtemos la base de

W_λ vamos a tener

$\{v_\lambda^1, \ldots, v_\lambda^k\}$ vectores

como base a estos vectores

los ortonormalizamos

$\{v_\lambda^1, \ldots, v_\lambda^k\} \longrightarrow \{u_\lambda^1, \ldots, u_\lambda^{k_\lambda}\}$

proceso

naglo

luego para cada λ tenemos

$\{u_\lambda^1, \ldots, u_\lambda^{k_\lambda}\}$ vectores propios ortonormalizados.

luego si juntamos todos estos vectores obtendremos una base de vectores propios ortonormal del espacio. y podremos diagonalizar con estos vectores

forma de ortogonalizar:

Gram - Schmidt (G-S)

es un algoritmo que dado un conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$ nos entrega un conjunto ortonormal $\{u_1, \ldots, u_k\}$ t.q

$\langle\{v_1, \ldots, v_m\}\rangle = \langle\{u_1, \ldots, u_k\}\rangle$

además

si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es base se tiene

$m = k$, [recordar que

un conjunto ortogonal es li cuando todos sus elementos son no nulos. En particular ser ortonormal cumple la condición: $\{u_1, \ldots, u_k\}$ siempre es una base del generado por el conjunto de interés dado $\{V_1, \ldots, V_n\}$ G-S es como sigue

1- $u_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|}$

2- $\forall K \geq 1$ definimos

$$w_{K+1} = v_{K+1} - \sum_{i=1}^{K} \langle v_{K+1}, u_i \rangle u_i$$

$$u_{K+1} = \frac{w_{K+1}}{\|w_{K+1}\|}$$

<u>Obs</u>: w_{K+1} <u>puede</u> ser cero, en ese caso ignoramos v_{K+1} y continuamos el

algoritmo en v_{k+2}

El proceso termina cuando se acaban los v_i

Por todo lo anterior calculemos los vectores propios

$\underline{\lambda = 0}$

$A \cdot v = 0 \cdot v$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$2x + y + z = 0$$
$$x + 2y - z = 0$$
$$x - y + 2z = 0$$

$\rightarrow Z = X + 2Y$

$\rightarrow 2x + Y + x + 2Y = 0$

$x - Y + 2[x + 2Y] = 0$

$\rightarrow 3x + 3Y = 0$

$3x + 3Y = 0$

$\rightarrow x + Y = 0$

$\rightarrow Y = -X$

$\rightarrow Z = x + 2[-x] = -X$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ -x \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 0 \quad , \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\boxed{\lambda = 3}$

$A \cdot v = 3 \cdot v$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 3x \\ x + 2y - z &= 3y \\ x - y + 2z &= 3z \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow -x + y + z = 0 \rightarrow x - y - z = 0$$

$$x - y - z = 0$$

son la misma ö

$$\rightarrow x - y - z = 0$$

$$\rightarrow x = y + z$$

$$\rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore \lambda = 3 \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

luego recapitulando

$$\lambda = 0 \leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 3 \leftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

luego hacemos G-S en cada conjunto

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ como es un solo vector basta normalizar

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$

mientras que

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es mas

de un vector, luego

hacemos G-S

definimos $\langle u_1 \rangle$, $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u_1 = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

luego

$$w_{1+1} = v_{1+1} - \sum_{i=1}^{1} \langle v_{1+1}, u_i \rangle u_i$$

$$\rightarrow w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}$$

$$\|w_2\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + 1}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\rightarrow u_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0 \longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\lambda = 3 \longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \right.$$

$$\longleftrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \right\}$$

luego Tenemos que

el conjunto, $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix} \right\}$

es una base ortonormal de vectores propios de A para el espacio $\mathbb{R}^3$.

c) Encontrar una matriz $P \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, $D \in M_{3,3}(\mathbb{R})$, D diagonal t.q $A = PDP^t$

Sol

los vectores propios ortonormales.

En general si $P = [v_1, \dots, v_n]$

(es decir v_i es la columna i-esima de P)

es simetrica y sus vectores son un conjunto ortonormal

$\Rightarrow$ P es invertible y es mas $P^{-1} = P^T$

luego como muestra base de vectores propios es ortonormal si P es la matriz que creamos $P^{-1} = P^T$ y por ende

$$A = PDP^{-1} = PDP^T$$

$$\Rightarrow A = PDP^T$$

luego

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

Puede verificar que $A = PDP^T$

d) Es A una matriz invertible

sai

recordamos

A es invertible

ssi

todos sus valores propios son

no nulos.

luego como $\lambda = 0$ es valor

propio A no es invertible

P6)

Sea $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\tilde{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sean ademas π el Plano de vector normal N y que pasa Por el origem

a) Encontrar una base orto-normal de π

Sol

recordamos que si $n = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\rightarrow \pi: \ ax + by + cz = D$

como $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi \rightarrow D = 0$

$\therefore \ \pi: \ 2x + 1 \cdot y + 2 \cdot z = 0$

$\Rightarrow Y = -2X - 2Z$

$\Rightarrow v \in \Pi$ ssi $v = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ -2X-2Z \\ Z \end{pmatrix}$

$= X \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ generam

Π, es mas som li $\therefore$ sombase

luego, usemos G-S para obtener uma base ortonormal

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2 + 8/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow u_2 = \frac{w_2}{\| w_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25} + 1}} \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\frac{45}{25}}} \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \quad u_2 = \sqrt{\frac{25}{45}}\begin{pmatrix}-4/5\\-2/5\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-4/5\\-2/5\\1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}-4\\-2\\5\end{pmatrix}\right\} \text{ es}$$

una base ortonormal //

b) Determine la ecuación cartesiana del plano π' que contiene a $\pi^{\perp}$ y al punto $P = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

Sol los espacios $(\cdot)^{\perp}$ son interesantes de estudiar

Por su relación con el conjunto original (ver apunte) estos se definen por: dado A

$$A^{\perp} = \{ v : \langle v, x \rangle = 0 \ \forall x \in A \}$$

Por eso calculemos $\Pi^{\perp}$ primero

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \Pi^{\perp}$ ssi

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \ \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi$$

$$ax + by + cz = 0$$

donde

$$2x + y + 2z = 0$$

luego lo más fácil para determinar a, b y c es imponer valores de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Ya que la ecuación se tiene que cumplir siempre

Si $y=0 \rightarrow 2x+2z=0$

$\rightarrow x=-z$

$\rightarrow ax+b\cdot 0+c\cdot(-x)=0$

$\rightarrow [a-c]x=0 \quad , \forall x$

$\rightarrow a=c$

luego $ax+by+az=0$

ahora $x=0 \rightarrow y+2z=0$

$\rightarrow y=-2z \therefore \quad a\cdot 0+b[-2z]+a\cdot z=0$

$\rightarrow \quad -2bz + az = 0$

$\rightarrow \quad [a-2b]z = 0$

$\rightarrow \quad a = 2b$

$\therefore \quad 2bx + by + 2bz = 0$

$\rightarrow \quad b[2x + y + 2z] = 0$

$\therefore \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 2b \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

así $\pi^{\perp} = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

luego π' es t.q

$Ax + By + Cz = 0$

com $\lambda\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \in \pi' \quad \forall \lambda$

$\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \in \pi'$

luego $0 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} \in \pi' \Rightarrow 0 \in \pi'$

$\Rightarrow D = 0$

$\therefore \pi' : Ax + By + Cz = 0$

$\rightarrow \quad A \cdot 2 + B \cdot 1 + C \cdot 2 = 0$

$A \cdot -1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 = 0$

$\rightarrow \quad 2A + B + 2C = 0$

$-A + B + C = 0$

$\rightarrow 3A + C = 0$

$\rightarrow C = -3A$

$\rightarrow 2A + B + 2[-3A] = 0$

$\rightarrow B - 4A = 0$

$\rightarrow B = 4A$

$\therefore \pi' : Ax + 4Ay - 3Az = 0$

$\rightarrow \pi' : x + 4y - 3z = 0$

$\hookrightarrow$ si $A = 0$ π' no es un plano

$\therefore A \neq 0$ y podemos dividir.

c) Determine los vectores unitarios pertenecientes a Π' que forman un angulo de $45°$ con N

Sol)

recordamos

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, N \rangle}{\|N\| \cdot \|v\|}$$

luego sea $v \in \Pi'$ y unitario

y $\alpha = 45$

$$\cos(45) = \frac{\langle v, N \rangle}{\|N\| \cdot \|\cancel{v}\|}$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \|N\| = \langle v, N \rangle$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{4+1+4} = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{9} = -2x + y + z$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \sqrt{2} = -2x + y + z$$

ademas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi$

$$x + 4y - 3z = 0$$

$4)\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}=1$

$:\quad -2x+y+z=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$x+4y-3z=0$

$x^2+y^2+z^2=1$

$x=-4y+3z$

$\to\ -2[-4y+3z]+y+z=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$[-4y+3z]^2+y^2+z^2=1$

$\to\ 8y-6z+y+z=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

$16y^2-12yz+9z^2+y^2+z^2=1$

$$\rightarrow 9y - 5z = \frac{3}{2}\sqrt{21}$$

$$17y^2 - 12yz + 10z^2 = 1$$

$$\rightarrow y = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{21} + 5z}{9}$$

$$\rightarrow 17\frac{\left[3\sqrt{21} + 10z\right]^2}{(18)^2} - 12\frac{\left[\frac{3}{2}\sqrt{21} + 5z\right]z}{9}$$

$$+ 10z^2 = 1$$

$$\rightarrow 17\left[3\sqrt{21} + 10z\right]^2 - \frac{(18)^2 \cdot 12}{9}\left[\frac{3}{2}\sqrt{21} + 5z\right]z$$

$$+ (18)^2 \cdot 10z^2 - (18)^2$$

$$17\left[3\sqrt{2}+10z\right]^2-432\left[\frac{3}{2}\sqrt{2}+z\right]z$$

$$+3240z^2=324$$

$$17\left[18+60\sqrt{2}z+100z^2\right]$$

$$-648\sqrt{2}z-432z^2+3240z^2=324$$

$$\left[1700-432+3240\right]z^2$$

$$+\left[17\cdot 60\cdot\sqrt{2}-648\cdot\sqrt{2}\right]z$$

$$+17\cdot 18-324=0$$

$$4508z^2+372\sqrt{2}z-18=0$$

luego

$$z=\frac{-372\sqrt{2}\pm\sqrt{\left[372\sqrt{2}\right]^2+4\cdot 18\cdot 4508}}{2\cdot 4508}$$

$$z = \frac{-372\sqrt{21} \pm \sqrt{601344}}{9016}$$

$$= \frac{-372\sqrt{21} \pm 144\sqrt{29}}{9016}$$

luego basta remplazar en

y, luego en x y obtenemos

los dos vectores pedido//

obs] [copie mal un numero
en el enunciado, por eso
quedo horrible los numeros]

d) sea $\tilde{\pi} = \{x \in \mathbb{R}^4 : \langle \tilde{N}, x \rangle = 0\}$

Encontrar una base
ortonormal de $\tilde{\pi}$ y $\tilde{\pi}^{\perp}$

Sol

$v \in \tilde{\pi}$ ssi $\langle \vec{N}, v \rangle = 0$

$$\rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\rightarrow -2x + y + 2z = 0$$

$$\rightarrow y = 2x - 2z$$

$$\rightarrow v = \begin{pmatrix} x \\ 2x - 2z \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

luego $\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ es

un generador [y base] de

$\tilde{\Pi}$ para ortonormalizarla

usaremos G-S. Por

simplicidad $v_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$,

$v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\rightarrow u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} - \cancelto{0}{\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow w_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix} \rightarrow u_2 = \frac{1}{\left\|\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right\|}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow w_3 = v_3 - \langle v_3, u_1\rangle \cdot u_1 - \langle v_3, u_2\rangle \cdot u_2$$

$$= \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} - \cancel{\left\langle \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}^{\,0} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} - \langle v_3, u_2\rangle \cdot u_2$$

$$= \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle}{5} \begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\to u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{-2}{5}\right)^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{45}{25}}} \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

es una base de $\tilde{T}$

ahora una propiedad importante
si W sev de $\mathbb{R}^n$ entonces

$$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$$

luego en nuestro caso $\tilde{\Pi}$ es
sev $\therefore$ $\mathbb{R}^4 = \hat{\Pi} \oplus \hat{\Pi}^\perp$

$$\Rightarrow \dim(\mathbb{R}^4) = \dim(\hat{\Pi}) + \dim(\hat{\Pi}^\perp)$$
$$= 3 + \dim(\hat{\Pi}^\perp)$$

$$\Rightarrow 4 = 3 + \dim(\hat{\Pi}^\perp)$$

$$\Rightarrow \dim(\hat{\Pi}^\perp) = 4 - 3 = 1$$

luego basta encontrar
un vector no nulo de $\hat{\Pi}^\perp$

$\tilde{\Pi}^{\perp} = \{ v : \langle v, x \rangle = 0 \ \forall x \in \tilde{\Pi} \}$

notamos que $\tilde{N}$ cumple eso

luego $\tilde{N} \in \tilde{\Pi}^{\perp}$

$$\Rightarrow \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{9}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una

base ortonormal de

$\tilde{N}$ //