

MA1102-4 Álgebra Lineal**Profesor:** Jaime San Martín.**Auxiliar:** Sebastián Bustos

Last Auxilio Ortogonalidad

P12 C6 P1 - Álgebra 1997

Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcular los valores propios de A
- De una base ortonormal de vectores propios de A
- Encontrar una matriz $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ y $D \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, D diagonal, tal que $A = PDP^t$
- Es A una matriz invertible, justifique su respuesta

P6 C5 P1 - Álgebra 2001

Sea $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\tilde{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sea además Π el plano de vector normal N y que pasa por el origen.

- Encontrar una base ortonormal de Π
- Determine la ecuación cartesiana del plano Π' que contiene a $\Pi^\perp$ y al punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- Determine los vectores unitarios pertenecientes a Π' que forman un ángulo de 45° con N
- Sea $\tilde{\Pi} = \{X \in \mathbb{R}^4 : \langle \tilde{N}, X \rangle = 0\}$. Encontrar una base ortonormal de $\tilde{\Pi}$ y $\tilde{\Pi}^\perp$

P4 C5 P2 b - Álgebra 1999

Sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y W el sub espacio generado por A .

- Extraiga de A una base de W
- Ortonormalice la base encontrada.
- Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que contenga la base de b

P1 C5 P1- Álgebra 1996

Sea Π_0 el plano que pasa por el origen $O(0, 0, 0)$ y tiene vectores directores $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 2)$.

- Escriba la ecuación normal del plano Π_0
- Encontrar la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y no corta a Π_0
- Calcular la proyección P sobre Π_0
- Calcular la distancia entre Π y Π_0
- Usando Gram-Schmidt, dar una base ortonormal de Π_0

P7 C5 P2 b - Álgebra 2002

Sean U, V sub espacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que:

- a) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$
- b) $(U^\perp)^\perp = U$
- c) $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$
- d) $U \oplus V = \mathbb{R}^n \iff U^\perp \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$

P2 C5 P1- Álgebra 1997

Sea W el sub espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

- a) Determine una base de W y su dimensión
- b) Extienda la base encontrada en a) a una base de $\mathbb{R}^4$
- c) Encuentre una base ortonormal de W y $W^\perp$ (el ortogonal de W)
- d) Encuentre la descomposición de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ en $W + W^\perp$

P3 C5 P3- Álgebra 1998

a) Sea $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

- 1) Calcular una base ortonormal de V y calcular su dimensión
- 2) Calcular una base de $V^\perp$ (V ortogonal)
- b) Sea M una matriz triangular superior de dimensión $n \times n$ cuya diagonal es estrictamente positiva. Sean $v_1, \dots, v_n$ los distintos vectores columna de M ordenados de primera a ultima columna. Probar por recurrencia que al aplicar el algoritmo de Gram-Schmid a la base $\{v_1, \dots, v_n\}$ se obtiene como resultado la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$

P5 C5 P3 i - Álgebra 2000

Sea $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

- a) Pruebe que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W^\perp$
- b) Encuentre bases ortonormales de W y $W^\perp$

P8 C5 P2 - Álgebra 2004

a) Sean

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

- 1) Encuentre una base del sub espacio vectorial generado por v_1, v_2, v_3, v_4
 - 2) De una base de vectores ortogonales entre sí para el sub espacio de la parte anterior
 - 3) Encuentre una base del ortogonal del sub espacio generado por v_1, v_2, v_3, v_4
- b) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por $p = (1, 0, 0)$ con vector director $d = (1, -1, 1)$
- 1) ¿Es L un sub espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?
 - 2) Se define $S = \{z \in \mathbb{R}^3 : \langle z, x \rangle = 0, \forall x \in L\}$. Pruebe que S es la recta que pasa por el orgine con vector director $p \times d$
 - 3) Encuentre una base de $S^\perp$

P9 C5 P1 - Álgebra 2005

Sea E el sub espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vecotres

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- a) Encuentre una base de E y la dimensión de E
- b) Encuentre una base de $E^\perp$ y la dimensión $E^\perp$
- c) Para el vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ encuentre $v \in E$ y $w \in E^\perp$ tales que $x = v + w$

P20 C6 P3 ii - Álgebra 2000

Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal tal que $T(x) = \langle v, x \rangle v$

- a) Pruebe que $Im(T) = \langle \{v\} \rangle$ y que $Ker(T) = \langle \{v\} \rangle^\perp$
- b) Pruebe que $dim(Ker(T)) = n - 1$
- c) Sea $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ una base de $\langle \{v\} \rangle^\perp$. Pruebe que $v_1, \dots, v_{n-1}$ son vectores propios de T asociados al valor propio 0
- d) Pruebe que T es diagonalizable, i.e, que existe una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de T

P22 C6 P3 - Álgebra 2001

Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matriz simetrica con una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios $v_1, \dots, v_n$ asociados a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ respectivamente donde $1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0$

- a) Sea $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\alpha_i = \langle u, v_i \rangle$, que $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ y $Au = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v_i$
- b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ y $w = Au - \langle u, v_1 \rangle v_1$. Pruebe que $w \perp v_1$
- c) Sea $u \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $u \perp v_1$, entonces $Au \perp v_1$ y $\|Au\|^2 \leq \lambda_2^2 \|u\|^2$
- d) Para w definido en b, pruebe que $\|A^m w\| \leq \lambda_2^m \|w\|$ para todo $m \geq 1$. Concluya que si $u \in \mathbb{R}^n$ y $m \geq 0$ entonces:

$$\|A^{m+1}u - \langle u, v_1 \rangle v_1\| \leq \lambda_2^m \|Au - \langle u, v_1 \rangle v_1\| \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$