

Valores y vectores propios  
nacem de la idea de buscar  
matrices de la forma

$A = P D P^{-1}$ , principalmente  
para decir  $A^n = P D^n P^{-1}$   
y simplificar cálculos  
computacionales.

Para esto definimos la  
noción de valor y vector  
propio.

diremos que  $v$  es un vector  
propio de  $A \in M_{n,n}(K)$  si  
 $\exists \lambda \in K \neq 0$  tal que  $Av = \lambda v$  y  $v \neq 0$

a  $v$  se le asocia  $\lambda$  y  
Por tanto a  $\lambda$  se le llama  
valor propio.

Para calcular los valores  
que  $Av = \lambda v$

si  $v \neq 0$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

$\therefore$  Como queremos  $v \neq 0$

Pedimos que  $A - \lambda I$  sea  
no invertible. Para  
esto hace la acción  
de discriminante

se calcula con una  
fórmula recursiva, y  
tiene ciertas propiedades  
útiles.

En el apunte están todas  
las más convenientes

1-  $A$  es invertible

ssi

el determinante es  
no nulo

2- determinante de  $A^{-1}$  es  
conocido. Si denotamos  
 $\det$ .

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

hay dos notaciones clásicas  
para el determinante

$$\det(A) \quad \text{y} \quad |A|$$

ahora definimos el polinomio  
característico de una  
matriz por

$$P(\lambda) = |A - \lambda I|$$

luego los valores propios  
son aquellos que

$$P(\lambda) = 0$$



diremos que una matriz  
es diagonalizable  
si existe una base de  
vectores propios.

en la práctica, si existe

$$P \text{ y } D \text{ t.q. } A = P D P^{-1}$$

A es diagonalizable  
con D diagonal.

[son def. equivalentes]

como calcular det.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$- b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$+ c_1 \left( \begin{array}{cc|c} a_2 & b_2 & \\ a_3 & b_3 & \end{array} \right)$$

$$\left( \begin{array}{cccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & \end{array} \right)$$

$$- a_1 \left( \begin{array}{ccc|c} b_2 & c_2 & d_2 & \\ b_3 & c_3 & d_3 & \\ b_4 & c_4 & d_4 & \end{array} \right)$$

$$- b_1 \left( \begin{array}{ccc|c} a_2 & c_2 & d_2 & \\ a_3 & c_3 & d_3 & \\ a_4 & c_4 & d_4 & \end{array} \right)$$

$$+c_1 \left| \begin{array}{ccc} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{array} \right|$$

$$-d_1 \left| \begin{array}{ccc} a_2 & b_2 & E_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{array} \right|$$

y este es el patron

[espero quede claro]

con eso calculamos los  
de A

$$p(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-1 \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{array} \right| \rightarrow \text{ver que} \\ \text{vale cero}$$

$$= (2-\lambda) \left| \begin{array}{ccc} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{array} \right|$$

$$= (2-\lambda) \cdot (2-\lambda) \cdot (-\lambda) \cdot (2-\lambda)$$

↳ mos tran. que  $S; D$   
es diagonal

$$|D| = \prod D_{ii} \quad [la \text{ mult.}]$$

de su diagonal]

$$\Rightarrow P(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^3 \\ = (\lambda-2)^3 \lambda$$

luego decimos que

$\lambda=0$  tiene multiplicidad  
algebraica de 1

$\lambda=2$  tiene multiplicidad  
algebraica de 3



ahora para encontrar  
 $v_0$  [el vector asociado  
a  $\lambda = 0$ ]

hay que estudiar

$$A v_0 = \lambda \cdot v_0$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

$$2a + b = 0$$

$$2b = 0$$

$$2d = 0$$

$$\Rightarrow a = b = d = 0$$

$$\Rightarrow v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo um vetor  
próprio é  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Os vetores próprios  
formam um espaço  
vetorial.

dado  $\lambda$  definimos

$$W_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda I)$$

$\dim(W_\lambda)$  se le llama  
multiplicidad  
geométrica y  
resulta que

$$1 \leq \dim(W_\lambda) \leq \text{multiplicidad} \\ \times \text{algebraica}$$

se puede probar que

$\times$  alcanza la igualdad si

ssi la matriz es  
diagonalizable

obs: la igualdad para  
todos los  $\lambda$  basta  
que uno no sea igual  
para no ser diagonalizable  
ahora estudiemos

$$\lambda = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$za + b = za \rightarrow b = 0$$

$$zb = zb \rightarrow 0 = 0$$

$$0 = zc \rightarrow c = 0$$

$$zd = zd \rightarrow 0 = 0$$

$$\Rightarrow b = c = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

10 e 90  $\lambda = 2$  tiene

asociado 2 vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

resumen

$$\underline{\lambda = 0} \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

multiplicidad  
algebraica = 1

multiplicidad  
geometrica = 1



$$\underline{\lambda = 2} \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

multiplicidad  
algebraica = 3

multiplicidad  
geométrica = 2

} son  
distintos  
\*

por \* A no es  
diagonalizable



hacemos el mismo  
estudio para  $B$

obs

hay un teorema  
que dice

/ si  $A$  es simétrica

$\Rightarrow A$  es diagonalizable

/ y eso sabemos que  $B$   
es diagonalizable

y solo falta buscar  
sus valores y vectores  
propios.

$$P(\lambda) = |B - \lambda I|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 2-\lambda \cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \left[ (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} \right]$$

$$= (2-\lambda) \left[ (1-\lambda)^2 (2-\lambda) - (2-\lambda) \right]$$

$$= (2-\lambda)^2 \left[ (1-\lambda)^2 - 1 \right]$$

$$= (2-\lambda)^2 \left[ 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 1 \right]$$

$$= (2-\lambda)^2 \left[ \lambda^2 - 2\lambda \right]$$

$$= (\lambda - 2)^2 \lambda [\lambda - 2]$$

$$= \lambda (\lambda - 2)^3$$

$\Rightarrow \lambda = 0$  multiplicidad algebraica 1

$\lambda = 2$  multiplicidad algebraica 2

busquemos los vectores

Propios

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

$$2a = 0$$

$$b + c = 0$$

$$b + c = 0$$

$$2d = 0$$

$$\Rightarrow a = d = 0$$

$$b = -c$$

$$\Rightarrow v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \lambda = 0, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$2a = 2a \rightarrow 0 = 0$$

$$b + c = 2b \rightarrow c = b$$

$$b + c = 2c \rightarrow c = b$$

$$2d = 2d \rightarrow 0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$\Rightarrow$  hay tres vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y entonces como

multiplicidad geométrica  
es igual a la multiplici-  
dad algebraica para

Todo valor propio

la matriz es invertible  
diagonalizable

ahora como calculamos

$$P \text{ y } D \quad + - \quad \underline{q} \quad - 1$$

$$A = P D P^{-1}$$

$$P = [\text{vectores propios}]$$

$$D = [\text{valores propios}]$$

sean  $\{v_i\}_{i=1}^n$  los vectores

propios asociados a

$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  valores propios

de  $A \in M_{n,n}$  luego

$$P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$$



vectores como columnas

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

es importante que  
los valores propios

Tienen que ser  
'la misma columna'

[mismo número]

que su vector propio

a parte de eso

cualquier permutación

sigue siendo válida

mientras se respeta

la condición

ahora en matrices

$$\lambda = 0, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2, \quad v_2^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

verifican

$$B = P D P^{-1}$$

Para  $C$ ,  $C$  es simétrica

$\therefore$  es Diagonalizable

es mas  $D$  es diagonal

luego

$$\lambda = 0 \rightarrow e_1$$

$$\lambda = 2 \rightarrow e_2$$

$$\lambda = 2 \rightarrow e_3$$

$$\lambda = 2 \rightarrow e_4$$

donde  $e_i$  es la base  
canónica de  $\mathbb{R}^4$ .

Calculémoslo igualmente

$$P(\lambda) = |C - \lambda I|$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda (2-\lambda)^3$$

$$= \lambda (\lambda - 2)^3$$



$\Rightarrow \lambda = 0$  multiplicidad  
algebraica 1

$\lambda = 3$  multiplicidad  
algebraica 3

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 0 = 0$

$2b = 0$

$2c = 0$

$2d = 0$

$\lambda = 0$

$$\Rightarrow v_0 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda = 0, \quad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$\underline{\lambda = 2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$0 = 2a \rightarrow a = 0$$

$$2b = 2b$$

$$2c = 2c$$

$$2d = 2d$$

$$\} \quad 0 = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_2^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_2^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = C$$

P14

Encuentre todos los valores  
de los parámetros  
 $\alpha$  y  $\beta$  de modo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable

So]

Calcularmos

los valores propios  
en función de  $\alpha$  y  $\beta$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$= \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-\alpha \left| \begin{array}{cccc} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{array} \right|$$

ah o n a

$$\left| \begin{array}{cccc} 2-\lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{array} \right|$$

$$= (2-\lambda) \left| \begin{array}{ccc} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{array} \right|$$



$$- \alpha \left| \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array} \right|$$

$$= (z-\lambda) \left| \begin{array}{ccc|c} z-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 0 \end{array} \right|$$

$$= (z-\lambda) \cdot (z-\lambda) \cdot \left| \begin{array}{cc|c} 1-\lambda & \beta & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \end{array} \right|$$

$$= (z-\lambda)^2 (1-\lambda)^2$$

$$= (\lambda-z)^2 (\lambda-1)^2$$

$$\Rightarrow P(\lambda)$$

$$= (z - \lambda)(\lambda - z)^2 (\lambda - 1)^2$$

$$- \lambda \left| \begin{array}{cccc} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & z - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{array} \right|$$

$$a \hbar \pi a$$

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & z - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{array} \right|$$

$$= -\alpha \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \beta \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = -(\lambda - 2)^3 (\lambda - 1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda = 1, \text{ multiplicidad algebraica } 2$$

$$\lambda = 2, \text{ multiplicidad algebraica } 3$$

luego hay que buscar  
 $\alpha$  y  $\beta$  de las multiplici-  
 dades geométricas

coincide com as  
algebraicas

$$\underline{\lambda = 1}$$

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & \alpha & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{array} \right)$$

$$= 1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 2 \cdot a + \alpha \cdot b = a$$

$$2 \cdot b + \alpha \cdot c = b$$

$$2 \cdot c = c$$

$$1 \cdot d + \beta \cdot e = d$$

$$1 \cdot e = e$$

$$\rightarrow a = -\alpha \cdot b$$

$$b = -\alpha \cdot c$$

$$c = 0$$

$$\beta \cdot e = 0$$

$$\rightarrow a = 0$$

$$b = 0$$

$$c = 0$$

$$\beta \cdot e = 0$$

Tenemos que

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } \beta \neq 0 \Rightarrow e = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y por ende la multiplicidad geométrica sería 1  
por lo que es algebraica 2

∴  $\beta \neq 0 \Rightarrow$  la matriz  
no es diagonalizable

así  $\boxed{\beta = 0}$

de donde  $\rho(A) = 2$

$$\lambda = 2$$



$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 2 & \alpha & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & e \end{array} \right) = 2 \left( \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ 0 \end{array} \right)$$

$$2a + \alpha b = 2a$$

$$2b + \alpha \cdot c = 2b$$

$$2c = 2c$$

$$d + \beta \cdot e = 2d$$

$$e = 2e$$

$$\rightarrow \alpha \cdot b = 0$$

$$\alpha \cdot c = 0$$

$$d = \beta \cdot e$$

$$e = 0$$

$$\rightarrow \alpha \cdot b = 0$$

$$\alpha \cdot c = 0$$

$$d = 0$$

$$e = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$S1. \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow b = c = 0$$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$  la multiplicidad

geométrica sería

1 y no sería igual

algebraica

$\Rightarrow$  sería no diagonalizable

$\therefore$  querremos  $\alpha = 0$

$$\Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} d \\ b \\ c \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= d \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que son tres vectores  
y por tanto todas  
las multiplicidades  
algebraicas son iguales

asus geométricas  
[perspectivas] y

para em de es dig.

luego  $\alpha = \beta = 0$  es

lo que bus camos

P17 Sea  $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$

se sabe que  $A$  es  
simétrica y que

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  es vector propio

de  $A$  asociado al valor  
propio 2 y además

$$\dim(\text{Ker}(A)) = 2.$$

Calcular  $A$

Sol,

$$A \in M_{33}(\mathbb{R})$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

A es simétrica

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$



ahora

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$c = e = 0$$

$$f = 2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ahora  $\ker(A)$  es

de dimensión 2

estudiamos el  $\ker(A)$  e

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$a x + b y = 0$$

$$b x + d y = 0$$

$$z z = 0 \Rightarrow z = 0$$

ahora queremos

que el  $\ker$  tenga

dimension 2

es decir queremos

que  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  sean libres

queremos que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

tenha infinitas

soluções em  $\mathbb{R}^2$

para a imagem

[vista como função]

vem  $\mathbb{R}^2$

luego

$$5) T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

part TNI

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T)$$

queremos que

$$\text{Ker}(T) = \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^2 = \dim \mathbb{R}^2 - (\dim \text{Im } T)$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im } T = 0$$

$$\text{ie } \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow a=b=d=0$$

la única opción para  
que la imagen sea  
Cero

$$\Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

P15

sean  $R, S \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

con  $S$  invertible

sea  $A = R \cdot S$  y  $B = S \cdot R$

- a) Pruebe que  $v \in \mathbb{R}^n$  es  
vector propio de  $A$   
asociado a  $\lambda \in \mathbb{R}$   
ssi  $Sw$  es vector  
propio de  $B$  asociado  
al mismo valor propio  
concluya que  $A$  y  $B$   
tienen los mismos  
valores propios



Sol,

$$\Rightarrow | Av = \lambda v$$

$$\text{p.d.q } B Sv = \lambda Sv$$

$$A = RS$$

$$\Rightarrow R Sv = \lambda v$$

$$2 \quad B = SR$$

$$\Rightarrow R = S^{-1} B$$

$\swarrow$   
S invertible

$$\Rightarrow S^{-1} B S v = \lambda v$$

$$\Rightarrow B S v = S \lambda v$$

$$= \lambda S v$$

$\hookrightarrow \lambda$  es escalar

$\Rightarrow S v$  es vector propio

de  $B$  asociado a  $\lambda$ .

hay que verificar

que  $S v \neq 0$  pero como

$S$  es invertible

$$Sv = 0 \Rightarrow v = 0$$

però  $v$  es vector propio

$$\therefore v \neq 0 \Rightarrow Sv \neq 0 \quad \checkmark$$

⊆

$$BSv = \lambda Sv = S\lambda v$$

$$\Rightarrow S^{-1}BSv = \lambda v$$

$$\Rightarrow RSv = \lambda v$$

$$\Rightarrow Av = \lambda v //$$

$$\text{y como } sv \neq 0 \Rightarrow s^{-1} \cdot sv \neq 0$$

$$\Rightarrow v \neq 0 //$$

mostremos que

$$\lambda \text{ vp de } A \text{ si } \lambda \text{ vp de } B$$

$$\Rightarrow \text{si } \lambda \text{ vp de } A$$

$$\Rightarrow \exists v \neq 0$$

$$Av = \lambda v$$

$$\Rightarrow B \cdot sv = \lambda \cdot sv \quad \downarrow \text{ v.o. probado.}$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ es vp de } B$$

⇒

Si  $\lambda$  es  $v.p.d.c$   $B$

$$\Rightarrow Bv = \lambda v$$

ahora

$$v = S^{-1} \cdot S v = S^{-1} \cdot u, \quad u = S v$$

$\Rightarrow$   $u$  es vector propio  
de  $B$  asociado a  $\lambda$

$\Rightarrow$   $u$  es vector propio  
de  $A$  asociado a  $\lambda$

$\Rightarrow \lambda$  es valor propio de  $A$

b) Sea  $U_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$   
 $U_\lambda(B) = \text{Ker}(B - \lambda I_m)$

Prove que

$$\dim(U_\lambda(A)) = \dim(U_\lambda(B))$$

Sol

Sea  $\{v_1, \dots, v_m\}$  base de

$U_\lambda(A)$  probaremos que

$\{Sv_1, \dots, Sv_m\}$  son

base de  $U_\lambda(B)$

1- som li

como  $\{v_1, \dots, v_m\}$  som li

utilizamos el teorema

que dice "si  $T$  es

transformación lineal  
inyectiva y

$\{v_1, \dots, v_m\}$  som li

$\Rightarrow \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_m)\}$

som li"



Considerando

$$T(v) = Sv \quad \text{que es}$$

inyectiva por  $S$  ser  
invertible

$$\Rightarrow \{T(v_1), \dots, T(v_m)\} \text{ son l.i.}$$

$$\Rightarrow \{Sv_1, \dots, Sv_m\} \text{ son l.i.}$$

basta ver que  $y$  emerar

$$\text{Sea } v \in U_A(B)$$

$$\Rightarrow (B - \lambda I)v = 0$$

$$\Rightarrow Bv = \lambda v$$

$\Rightarrow v$  es vector propio  
asociado a  $\lambda$

$$\Rightarrow v = S \cdot u, \quad u = S^{-1}v$$

y  $u \in U_{\lambda}(A)$ , por lo

probado anteriormente

$$\Rightarrow u = \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow v = S \cdot \sum_{i=1}^m \alpha_i v_i$$

$$= \sum_{i=1}^m \alpha_i (S \cdot v_i)$$

$\Rightarrow \{Sv_1, \dots, Sv_m\}$  y en general

y son li.

$\Rightarrow$  son base.

luego  $U_\lambda(A)$  y  $U_\lambda(B)$

tienen bases del mismo

Tamaño

∴

$$\dim(V_A(A)) = \dim(V_A(B))$$

(c) pruebe que

A es diagonalizable

ssi

B es diagonalizable

⇒ si A es diagonalizable

utilizaremos la definición

$A$  es diagonalizable  
ssi existe una base  
de vectores propios de  
 $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow n = \sum_{i=1}^p \dim(U_{\lambda_i}(A))$$

don  $\lambda_i$  son los valores  
propios distintos de  $A$

ahora

$$\dim(U_{\lambda_i}(A)) = \dim(U_{\lambda_i}(B))$$

$$\Rightarrow m = \sum_{i=1}^p \dim(U_{\lambda_i}(B))$$

y como los vectores  
entre valores propios

distinto son li (teo 5.2)  
a p m te

luego con las bases  
nos da una base de  $\mathbb{R}^3$

[Por ser n vectores]

y  $\therefore B$  es diagonalizable

[El mismo argumento]

Intercambiando roles

P19]

sea  $A$  t.q  $\ker(A-I)$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{y } \ker(A-2I)$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

a) demuestre que  $A$  es diagonalizable

so]

del enunciado sacamos

que  $A \in M_{3,3}$



y que

$\lambda = 1$  y  $\lambda = 2$  son

valores propios

luego notamos que

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  son ii

y por lo tanto

$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

son ii donde

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  es ii con los otros

por ser de valores propios  
distintos

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$  es

base de  $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow A$  es diagonalizable

b) calcule  $A$

Para calcular  $A$

notamos que

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

luego

$$A = P D P^{-1}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 3/2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 2 \end{array} \right)$$

$$\downarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & | & -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & -2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-7P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = P D P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

P111

a) sea  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\text{si } q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_s x^s$$

es un polinomio a coef. reales, se define

$$q(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_s A^s$$

Probar que si  $A$  es diagonalizable y

$p$  es polinomio característico



$$\Rightarrow P(A) = 0 \rightarrow \text{0 matrix}$$

so]

matrix que si

$$P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$\forall A = P D P^{-1}$$

$$\Rightarrow P(A) = \sum_{i=0}^n a_i (P D P^{-1})^i$$

prop.  $\Leftarrow$

$$= \sum_{i=0}^n a_i P D^i P^{-1}$$

$$= P \sum_{i=0}^n a_i D^i P^{-1}$$

$$= P P(D) P^{-1}$$

iveq e basta ver q  $v \in$

$$P(D) = 0$$

ahora

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^i = \begin{pmatrix} \lambda_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(D) = \sum_{i=1}^m a_i D^i$$

$$= \sum_{i=1}^m a_i \begin{pmatrix} \lambda_1^i & 0 \\ 0 & \lambda_m^i \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} a_i \lambda_1^i & 0 \\ 0 & a_i \lambda_m^i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m a_i \lambda_1^i & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^m a_i \lambda_m^i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & 0 \\ 0 & P(\lambda_m) \end{pmatrix}$$

com  $p$  es el polinomio

característico

$$p(X_0) = 0 \quad \forall \delta$$

$$\Rightarrow p(D) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 0 //$$

$$\text{vee } a \quad p(A) = 0 //$$

b) Si  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$   
 $m \geq 2$ , prueban por inducción  
 que el polinomio  
 característico de  
 la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{m-1} \end{pmatrix}$$

es igual a

$$(-1)^m \left( \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k \lambda^k + \lambda^m \right)$$

$$\underline{n=2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I|$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & -\alpha_0 \\ 1 & -\lambda - \alpha_1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + \lambda \alpha_1 - \alpha_0$$





$$= (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -1 & \cdots & -\alpha_1 \\ & \ddots & \\ 1 & -1 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1 & -2n-1 \end{vmatrix}$$

$$+ (-1)^n (-2\alpha) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Port  
diagonal  
superior

$$= -\lambda \cdot (-1)^n \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} \lambda^i + \lambda^n \right]$$

$$+ (-1)^{n+1} 2\alpha \cdot 1$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} \lambda^{i+1} + (-1)^{n+1} \lambda^{n+1}$$

$$+ (-1)^{n+1} \alpha_0$$

$$= (-1)^{n+1} \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda^i + \alpha_0 \right] + \lambda^{n+1}$$

$$= (-1)^{n+1} \left[ \sum_{i=0}^n \alpha_i \lambda^i + \lambda^{n+1} \right]$$

P301

Dada

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 12 & -10 & -12 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & 12 & -36 \\ 12 & -4 & -12 & -14 & 0 & 12 \\ 24 & 4 & -24 & -16 & 6 & -12 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

se sabe que  $A$  es diagonalizable  
con valores propios  $6, 2, -6$

- a) Encontrar una base  
del subespacio asociado a  
 $\lambda = -6$  y determinar las  
dimensiones de los  
subespacios propios asociados

a ambos valores propios

sol

estudiamos

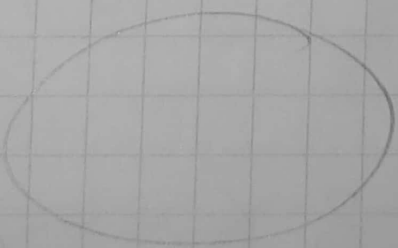
$$(A + \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0$$

luego  $A + \lambda I$ :

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 12 & -36 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 12 \\ 24 & 4 & -24 & -16 & 12 & -12 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

( es calomando

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \\ 0 & 12 & 0 & 0 & 12 & -36 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 0 & -12 & 0 & 0 & -12 & 36 \end{pmatrix}$$


10 e 4 0

$$12x_1 + 8x_2 - 12x_3$$

$$- 8x_4 + 12x_5 - 24x_6 = 0$$

$$- 12x_2 - 12x_5 + 36x_6 = 0$$

$\Rightarrow$

$$3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 - 6x_6 = 0$$

$$- x_2 - x_5 + 3x_6 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = 3x_6 - x_5$$

$$\Rightarrow 3x_1 + 6x_6 - 2x_5$$

$$- 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 - 6x_6 = 0$$

$$3x_1 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 = x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + \frac{2}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5 \\ 3x_6 - x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$$



$$= x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x_5}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo uma base de

$\text{Ker}(A + 6I)$  es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ahora una propiedad

es que cuando  $A$  es diagonalizable

$$n = \sum_{i \in I} \dim(\text{Ker}(A - \lambda_i I))$$

[la suma de las multiplicidades geométricas es el tamaño de la matriz.]

$$10 \neq 0$$

$$6 = \dim(\text{Ker}(A - 6I)) + \dim(\text{Ker}(A - 6I))$$

$$6 = 4 + \dim(\text{Ker}(A - 6I)) \\ \rightarrow \dim(\text{Ker}(A - 6I)) = 2$$

b) Encontrar una  
matriz diagonal  $D$   
similare a  $A$ , es decir,

$$A = P D P^{-1}, \text{ con } P \text{ invertible.}$$

Sol

com  $\lambda = -6$  tiene multiplici-  
dad 4 se repite 4  
veces en  $D$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} -6 & & & \\ & -6 & & \\ & & -6 & 0 \\ & 0 & & -6 & \\ & & & & 6 & \\ & & & & & 6 \end{pmatrix}$$

es una opción Factible //

c) determinar el polinomio  
característico de  $A$ ,  
es decir,  $P(\lambda)$

So)

$$P(\lambda) = \pm (\lambda + 6)^4 (\lambda - 6)^2$$

• esto por que

$\lambda = -6$  es una raíz de  
multiplicidad 4 y

$\lambda = 6$  es una raíz de tamaño  
2, luego solo

Falta determinar el signo

pero SPG uno pide

a sumir signo positivo

[no es relevante el signo]

$$\Rightarrow P(\lambda) = (\lambda + 6)^4 (\lambda - 6)^2$$

d) Explique por qué  $A$   
es invertible

sol

una propiedad de las  
matrices diag.

es que

$$|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \text{ con } \lambda_i \text{ es}$$

• un valor propio [incluyendo multiplicidad] luego

$$|A| = -6 \cdot -6 \cdot -6 \cdot -6 \cdot 6 \cdot 6$$

$$= 6^6$$

• y  $A^{-1}$  existe

ssi

$$|A| \neq 0 \text{ como } 6^6 \neq 0$$



A es invertible

e) encontrar una matriz

diagonal  $\tilde{D}$  similar

a  $A^{-1}$ , es decir

$$A^{-1} = P \tilde{D} P^{-1}, P \text{ invertible}$$

so)

$$A = P D P^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A^{-1} &= (P^{-1})^{-1} D^{-1} P^{-1} \\ &= P D^{-1} P^{-1} \end{aligned}$$



luego el candidato

es  $D^{-1}$  recordamos

$$\bullet D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_m \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1/d_m \end{pmatrix}$$

$$\bullet \tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1/6 & 1/6 & & & \\ & -1/6 & 1/6 & & \\ & & -1/6 & 1/6 & \\ & & & -1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$