MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar de Auxilio
Ortogonalidad, determinante, valores y vectores propios

Desde la $P32$ hay problemas de otras universidades

P1. ***C5 P1- Álgebra 1996***

Sea Π_0 el plano que pasa por el orgien $O(0,0,0)$ y tiene vectores directores $(0,1,1)$ y $(1,0,2)$.

a) Escriba la ecuación normal del plano Π_0

b) Encontrar la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y no corta a Π_0

c) Calcular la proyección P sobre Π_0

d) Calcular la distancia entre Π y Π_0

e) Usando Gram-Schmidt, dar una base ortonormal de Π_0

P2. ***C5 P1- Álgebra 1997***
Sea W el sub espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

a) Determine una base de W y su dimensión

b) Extienda la base encontrada en *a*) a una base de $\mathbb{R}^4$

c) Encuentre una base ortonormal de W y $W^\perp$ (el ortogonal de W)

d) Encuentre la descomposición de $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ en $W + W^\perp$

P3. ***C5 P3- Álgebra 1998***

a) Sea $V = \left\langle \left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\3\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$

1) Calcular una base ortonormal de V y calcular su dimensión

2) Calcular una base de $V^\perp$ (V ortogonal)

b) Sea M una matriz triangular superior de dimensión $n\times n$ cuya diagonal es estrictamente positiva. Sean $v_1,...,v_n$ los distintos vectores columna de M ordenados de primera a ultima columna. Probar por recurrencia que al aplicar el algoritmo de Gram-Schmid a la base $\{v_1,...,v_n\}$ se obtiene como resultado la base canónica $\{e_1,..,e_n\}$

P4. ***C5 P2 b - Álgebra 1999***

Sea $A = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\3\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}$ y W el sub espacio generado por A.

a) Extragia de A una base de W

b) Ortonormalice la base encontrada.

c) Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ que contenga la base de *b*)

P5. ***C5 P3 i - Álgebra 2000***

Sea $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

a) Pruebe que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in W^\perp$

b) Encuentre bases ortonormales de W y $W^\perp$

P6. ***C5 P1 - Álgebra 2001***

Sea $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\tilde{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sea ademas Π el plano de vector normal N y que pasa por el origen.

a) Encontrar una base ortonormal de Π

b) Determine la ecuación cartesiana del plano Π' que contiene a $\Pi^\perp$ y al punto $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Determine los vectores unitarios pertenecientes a Π' que forman un ángulo de $45°$ con N

d) Sea $= \{X \in \mathbb{R}^4 : \langle \tilde{N}, X \rangle\}$. Encontrar una base ortonormal de y $^\perp$

P7. ***C5 P2 b - Álgebra 2002***

Sean U, V sub espacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que:

a) $(U + V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$

b) $(U^\perp)^\perp = U$

c) $(U \cap V)^\perp) = U^\perp + V^\perp$

d) $U \bigoplus V = \mathbb{R}^n \iff U^\perp \bigoplus V^\perp = \mathbb{R}^n$

P8. ***C5 P2 - Álgebra 2004***

a) Sean

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1) Encuentre una base del sub espacio vectorial generado por v_1, v_2, v_3, v_4
2) De una base de vectores ortogonales entre sí para el sub espacio de la parte anterior
3) Encuentre una base del ortogonal del sub espacio generado por v_1, v_2, v_3, v_4

b) Sea $L \subseteq \mathbb{R}^3$ la recta que pasa por $p = (1, 0, 0)$ con vector director $d = (1, -1, 1)$

1) ¿Es L un sub espacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?
2) Se define $S = \{z \in \mathbb{R}^3 : \langle z, x \rangle = 0, \forall x \in L\}$. Pruebe que S es la recta que pasa por el orgine con vector director $p \times d$
3) Encuentre una base de $S^\perp$

P9. ***C5 P1 - Álgebra 2005***

Sea E el sub espacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por los vecotres

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-3\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

a) Encuentre una base de E y la dimensión de E

b) Encuentre una base de $E^{\perp}$ y la dimensión $E^{\perp}$

c) Para el vector $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ encuentre $v\in E$ y $w\in E^{\perp}$ tales que $x=v+w$

P10. ***C6 P2 i - Álgebra 1996***
Considere las siguientes matrices reales

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\\0&2&0&0&\\0&0&2&0&\\0&0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Calcule los valores y vectores propios de las matarices A,B y C. Diga cuales de ellas son diagonalizables.

P11. ***C6 P3 - Álgebra 1996***

a) Sea $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si $q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_sx^s$ es un polinomio a coeficientes reales, se define $q(A):=a_0I+a_1A+a_2A^2+...+a_sA^s$. Probar que si A es diagonalizable y p es el polinomio caracteriztico entonces $p(A)=0$ (la matriz nula de dimensión $n\times n$)

b) Si $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_{n-1}\in\mathbb{R}$ y $n\geq 2$, probar por inducción que el polinomio característrico de la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&-\alpha_0\\1&0&\dots&0&-\alpha_1\\0&1&\dots&0&-\alpha_2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\dots&1&-\alpha_{n-1}\end{pmatrix}$$

es igual a: $(-1)^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\lambda^k+\lambda^n\right)$

P12. ***C6 P1 - Álgebra 1997***
Considere la matriz $A\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ siguiente

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$$

a) Calcular los valores propios de A

b) De una base ortonormal de vectores porpios de A

c) Encontrar una matriz $P\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y $D\in\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, D diagonal, tal que $A=PDP^t$

d) Es A una matriz invertible, justifique su respuesta

P13. ***C6 P3 - Álgebra 1997***

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable y $k \leq n$. Se conoce la factorización de A siguiente:

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

donde $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $\lambda_i \neq 0, \forall i$. Si definimos:

$$A^+ = P\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\lambda_k} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

probar que $A^+ \cdot A = A \cdot A^+$ y que $A^+ \cdot A = P\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Diga cuales son los valores propios de $A \cdot A^+$

b) Considere la matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ definida por

$$A_n = \begin{pmatrix} w & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & w & -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & w & -1 \\ w & \cdot & \cdot & \cdot & w & w \end{pmatrix}$$

donde $n \geq 2$, $w \in \mathbb{R}$. Denotemos por $V_n = det(A_n)$. Probar por inducción que $V_n = \sum_{k=1}^{n} w^k$ (Indicacción: Pruebe que $V_n = V_{n-1} + w^n$)

P14. ***C6 P2 b - Álgebra 1998***

Encuentre todos los valores de los parametros reales α y β de modo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sea diagonalizable.

P15. ***C6 P3 - Álgebra 1998***

Sean $R, S \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ con S invertible. Considere $A = R \cdot S$ y $B = S \cdot R$

a) Pruebe que $v \in \mathbb{R}^n$ es vector propio de A asociado al valor propio de $\lambda \in \mathbb{R}$ **ssi** Sv es vector propio de B asociado al mismo valor propio. Concluya que A y B tienen los mismos valores propios.

b) Sean $U_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$ el subespacio propio de A asociado al valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$ y $U_\lambda(B)$ el sub espacio propio de B asociado a λ. Pruebe que $dim(U_\lambda)(A) = dim(U_\lambda(B))$

c) Pruebe que A es diagonalizable **ssi** B es diagonalizable

P16. ***C6 P2 - Álgebra 1999***

a) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. De una base ortonormal de vectores propios de A.

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, donde a es un parametro real. Calcule los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz a es diagonalizable.

P17. ***C6 P3 i - Álgebra 1999***

Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$. Se sabe que A es simétrica y que $(0,0,1)$ es vector propio de A asociado al valor propio 2 y ademas la dimensión del $Ker(A)$ es igual a 2. Calcular A

P18. ***C6 P1 - Álgebra 2000***

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$

P19. ***C6 P2 ii - Álgebra 2000***

Sea A tal que $Ker(A-I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$ y $Ker(A-2I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

a) Demuestre que A es diagonalizable

b) Encuentre A

P20. ***C6 P3 ii - Álgebra 2000***

Sea $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal tal que $T(x) = \langle v, x \rangle$v

a) Pruebe que $Im(T) = \langle \{v\} \rangle$ y que $Ker(T) = \langle \{v\} \rangle^{\perp}$

b) Pruebe que $dim(Ker(T)) = n-1$

c) Sea $\{v_1, ..., v_{n-1}\}$ una base de $\langle \{v\} \rangle^{\perp}$. Pruebe que $v_1, ..., v_{n-1}$ son vectores propios de T asociados al valor propio 0

d) Pruebe que T es diagonalizable, i.e, que existe una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de T

P21. ***C6 P1 - Álgebra 2001***

Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Encuentre D diagonal y P invertible tal que $A = PDP^{-1}$. Explicite P^{-1}

b) Sea $m > 0$. Verifique que si m es impar, entonces $A^m = A$ y si m es par entonces: $A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

P22. ***C6 P3 - Álgebra 2001***

Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matriz simetrica con una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios $v_1, ..., v_n$ asociados a los valores propios $\lambda_1, ..., \lambda_n$ respectivamente donde $1 = \lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_n > 0$

a) Sea $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\alpha_i = \langle u, v_i \rangle$, que $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$ y $Au = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i v_i$

b) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ y $w = Au - \langle u, v_1 \rangle v_1$. Pruebe que $w \perp v_1$

c) Sea $u \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $u \perp v_1$, entonces $Au \perp v_1$ y $||Au||^2 \leq \lambda_2^2 ||u||^2$

d) Para w definido en b, pruebe que $||A^m w|| \leq \lambda_2^m ||w||$ para todo $m \geq 1$. Concluya que si $u \in \mathbb{R}^n$ y $m \geq 0$ entonces:

$$||A^{m+1} u - \langle u, v_1 \rangle v_1|| \leq \lambda_2^m ||Au - \langle u, v_1 \rangle v_1|| \to 0, m \to \infty$$

P23. ***C6 P2 - Álgebra 2002***

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define una sucesión de números reales $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de las siguiente manera: $u_0 = 1$, $u_1 = a$, $\forall n \geq 2$ $u_n = a u_{n-1} - u_{n-2}$. Sean $x_0 = (1, 0)^T$ $x_n = (u_n u_{n-1})^t$

a) Demuestre que para todo $n \geq 0$ se tiene que $x_n = A^n x_0$ con $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Demuestre que si $|a| = 2$ entonces A no es diagonalizable

c) Demuestre que si $|a| > 2$ entonces A es diagonalizable

d) Asumamos que $|a| > 2$ y denotemos λ_1, λ_2 los valores propios de A. Demuestre que:

1) $(\lambda_1, 1)^t$ y $(\lambda_2, 1)^t$ son vectores propios asociados a λ_1 y λ_2 respectivamente
2) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $u_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$

P24. ***C6 P3 - Álgebra 2002***

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ no invertible, simétrica tal que $Ker(A + I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

1) Demuestre que los valores propios de A son 0 y -1
2) Demuestre que $Ker(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

b) Sean $k, n > 1$. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$. Demuestre que 0 es el único valor propio de A y concluya que A no es diagonalizable.

c) Sea $n > 1$. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que si A es diagonalizable encontes $Ker(A^2) \subseteq Ker(A)$

P25. ***C6 P1 - Álgebra 2003***

a) Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Pruebe que el polinomio característico de A es $P(\lambda) = (1 - \lambda)^3 (5 - \lambda)$
2) De una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$, formada por vectores propios de A

b) Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $a, b, c, d > 0$. Pruebe que A es diagonalizable.

P26. ***C6 P1 - Álgebra 2004***

Considerar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Muestre que el polinomio caracteristico de A es $p(\lambda) = (4-\lambda)(\lambda^2 - 36)$

b) Encuentre una base ortonormal de vectores propios de A y explecite matrices P invertible y D diagonal tales que $A = PDP^t$

c) Determine cuales de las siguientes matrices C son similares a A es decir que cumplen $A = QCQ^{-1}$ para alguna matriz Q invertible

$$C_i = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, C_{ii} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Justifique

P27. ***C6 P3 - Álgebra 2004***

a) Sea A una matriz de $n \times n$, $n \geq 3$ con coeficientes reales tal que $dim(Ker(A)) \leq 2$ y su polinomio característico $p(\lambda)$ tiene la forma $p(\lambda) = \lambda^3 q(\lambda)$ donde $q(\lambda)$ es un polinomio.

1) Pruebe que $dim(Ker(A)) \geq 1$ y que el rango de A es menor o igual a $n-1$

2) Demuestre que A no es diagonalizable

b) Sea A una matriz de $n \times n$ con coeficientes reales diagonalizable, es decir $A = PDP^{-1}$ con P invertible y D diagonal. Pruebe que A^t es diagonalizable y que las columnas de $(P^t)^{-1}$ forman una base de vecotres propios de A^t

P28. ***C6 P1 - Álgebra 2005***

a) Encuentre una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ De matrices P y D tales que $A = PDP^t$

b) Sean $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si A es la matriz de la parte *a*) responda justificando apropiadamente:

1) ¿Existe Q invertible tal que $A = QBQ^{-1}$?

2) ¿Existe Q invertible tal que $A = QCQ^{-1}$?

3)

4) ¿Existe Q invertible tal que $B = QCQ^{-1}$?

P29. ***C6 P3 b - Álgebra 2005***

Sean A, B matrices de $n \times n$ con coeficientes reales tales que $AB = BA$

a) Pruebe que si $Bv \neq 0$ y v es vector propio de A asociado a λ entonces Bv también lo es

b) Suponiendo que los valores propios de A son distitnos entre sí, muestre que si v es vector propio de A entonces v es vector propio de B

c) Cpncluya que si los valores propios de A son distintos entre sí entonces B es diagonalizable.

P30. ***C6 P2 - Álgebra 2005***

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & -12 & -8 & 12 & -24 \\ 12 & -10 & -12 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & -6 & 0 & 12 & -36 \\ 12 & -4 & -12 & -14 & 0 & 12 \\ 24 & 4 & -24 & -16 & 6 & -12 \\ 12 & -4 & -12 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se sabe que A es diagonalizable y sus valores propios son -6 y 6.

a) Encontrar una base del sub espacio asociado a $\lambda = -6$ (es decir base de $Ker(A + 6I)$) y determinar las dimensiones de los subespacios propios asociados a ambos valores propios

b) Encontrar una matriz diagonal D similar a A, es decir, $A = PDP^{-1}$ con P invertible

c) Determinar el polinomio característico de A, es decir $p(\lambda)$

d) Explique porqué A es invertible

e) Encontrar una matriz diagonal similar a A^{-1}, es decir $A^{-1} = PP^{-1}$ con P invertible

P31. ***C6 P3 - Álgebra 2005***

a) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ y A invertible. Muestre que si λ es valor propio de BA, entonces λ es valor propiod de AB.

b) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una matriz diagonalizable y tal que $\exists k \in \mathbb{N}$, $A^k = 0$. Encuentre A (justifique)

c) Sean A y B dos matrices diagonalizables en $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ con la misma base de vectores propios $\beta = \{v_1, ..., v_n\}$. Si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son los respectivos valores propios de A y $u_1, ..., u_n$ son los respectivos valores propios de B, se pide encontrar los valores propios de $A^3 + 2B$

P32. ***UTFSM***

a) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Encontrar los valores propios de A

b) Determine el polinomio caracteristico de la siguiente matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

c) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ una matriz diagonalizable, cuyos vecotres propios dados son $(i,-1),(i,1)$. Determine $P, P^{-1}, D \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$ tal que $A = PDP^{-1}$

d) Sea $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ una matriz con valores propios $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3y\lambda_3 = 3$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas

1) A tiene inversa y $\frac{1}{2}$ es valor propio de A^{-1}
2) La traza de A es igual a 5
3) El determinante de A^2 es 36

e) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ calcule sus valores propios y determine si la matriz es diagonalizable.

f) Si $a > -2$ calcule los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

g) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule los vecotres y valores propios, determine si la matriz es diagonalizable.

h) La matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ definida por $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & \beta & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ posee sólo dos valores propios y su traza es tal que $Traza(A) \leq 7$. Con respecto a los valores de α y β que permiten verificar las condiciones dadas. Determine cual(es) de las siguientes opciones son factibles

1) $\alpha = \beta$ y $\alpha \leq 1$
2) $\alpha = \beta$ y $\beta > 1$
3) $\alpha = 5$ y $\beta = -3$

i) Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable. En caso de serlo calcule la matriz P invertible y D diagonal tal que $A = PDP^{-1}$

j) Para un vector $u \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ se define el sub espacio vectorial $u^{\perp}$ como $u^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^3 : \langle u, w \rangle = 0\}$. Si $u = (1,1,1)$, encontrar una base de $u^{\perp}$

k) Sea $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Determinar los posibles valores de $a \in \mathbb{R}$ para que A sea una matriz no diagonalizable.

l) Encontrar el sub espacio propio asociado al mayor valor propio de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

P33. *UdeC*

a) Dado $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determine sus valores propios y compruebe que es diagonalizable.

b) Sea $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y considere el sub espacio de $\mathbb{R}^3$ definido por $U = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, n \rangle = 0\}$. Justificando cada una de sus respuestas decida si:

1) $U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$
2) $U = \langle \{n\} \rangle^{\perp}$
3) $U = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle^{\perp}$

c) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Determine el polinomio característico de A y sus respectivos valores propios.
2) Deduzca que es diagonalizable
3) Determine todos los sub espacios propios y de una base ortonormal de vectores propios de $\mathbb{R}^3$ que participan en la matriz P que diagonaliza a A (ie encuentre las columnas de P invertible tal que $A = PDP^t$)

d) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

1) Determine los valores propios de A
2) Sea sabe que $\lambda = 0$ es un valor propio de A con multiplicidad algebraica de dos. ¿Es A una matriz diagonalizable? Justifique

e) Encuentre condiciones sobre $a \in \mathbb{R}$ de modo que la matriz representante entre las bases canonicas de $T(x, y, z) = (2x + 2z, ay + (a + 1)z, z)$ sea diagonalizable.

f) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$, la cual tiene a $\lambda_1 = 1$ como uno de sus valores propios, con vector propio asociado $v_1 = (1, 1, 1)$

1) Determine el valor de α
2) Determine los valores propios de A y bases de los espacios propios correspondientes.
3) Justifique si A es diagonalizable

g) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Encuentre sus valores propios

h) Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Verifique que $\lambda = 2$ es un valor propio de multiplicidad algebraica igual a 3 y calcule su multiplicidad geometrica. Concluya que esta matriz no es diagonalizable y diga porque es invertible.

P34. *USACH*

a) Dado $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ demustre usando algún criterio de diagonalización que la matriz A es diagonalizable

b) Sea W generado por $\{(1,1,1,1), (-1,1,-1,1), (1,3,1,3), (4,3,4,3)\}$

1) Obtenga una base ortonormal de W

2) Encuentre la descomposición del vector $(1,2,3,4)$ en $W + W^{\perp}$

c)