

MA1102-4 Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliar: Sebastián Bustos



Problema Extra - Demostrando el Teorema Fundamental del Álgebra

Navegando por el mundo de internet encuentre una demostración del TFA ([Click](#)) que solo utiliza herramientas de álgebra lineal + un teorema de cálculo diferencial.

Es decir queremos demostrar (en su versión general) que:

Teorema 1. *Si p es un polinomio a coeficientes complejos entonces p tiene al menos una raíz compleja.*

Por el algoritmo de la división se concluye que un polinomio a coeficientes reales de grado n tiene n raíces complejas (contando posibles repeticiones).

Ahora el teorema de cálculo diferencial lo enunciare para el caso particular que nos interesa, y es relativamente convincente:

Teorema 2. *Sea p un polinomio a coeficientes reales de grado impar, entonces p tiene al menos una raíz real.*

En todo este problema utilizaremos $\mathbb{K}$ un cuerpo. En caso que trabajemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ lo diremos explícitamente.

Para esto definimos la matriz compañera de un polinomio.

Definición 1. *Sea $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$. Se define la matriz compañera $C_p \in \mathcal{M}_{n,n}$ como:*

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Problema 1. *Muestre que $\det(C_p - tI_n) = (-1)^n p(t)$*

Problema 2. *Muestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. $\forall p \in \mathbb{K}[x]$ con $\text{grd}(p)=n$ tiene una raíz en $\mathbb{K}$
2. Toda función lineal $T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ tiene, al menos, un valor propio en $\mathbb{K}$
3. $\forall M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, M tiene un valor propio en $\mathbb{K}$

Obs 1: $\mathbb{K}[x]$ Son los polinomios con constantes en $\mathbb{K}$

Obs 2: Cuando se habla de los valor y vectores propios de una función lineal son los de su matriz representante.

Problema 3. *Muestre que todo $T : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ función lineal tiene un valor propio real.*

Definición 2. *Sea $r \in \mathbb{N}$. Se definen las siguientes funciones proposicionales:*

1. $S_1(\mathbb{K}, r) := \{ \text{Para todo } n \text{ que } \mathbf{no} \text{ divide a } 2^r \text{ se cumple que: Toda transformación lineal } T : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \text{ tiene un vector propio} \}$
2. $S_2(\mathbb{K}, r) := \{ \text{Para todo } n \text{ que } \mathbf{no} \text{ divide a } 2^r \text{ se cumple que: Si } f, g : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n \text{ son dos transformaciones lineales cualesquiera que conmutan } (f \circ g = g \circ f) \text{ entonces tienen un vector propio en común} \}$

Obs: Una función proposicional es aquella que recibe ciertos parametros (en este caso el espacio en que trabajamos y un entero positivo) y nos entrega si la proposición lógica a la que representa es verdadera o falsa.

Problema 4. *Demuestre que $S_1(\mathbb{R}, 1)$ es verdadero.*

Problema 5. Demuestre que $S_1(\mathbb{K}, r) \implies S_2(\mathbb{K}, r) \forall r \geq 1$

Indicación: Utilice inducción sobre la dimensión $n \geq 1$ del espacio.

Definición 3. Dada $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ definimos la matriz adjunta de A , A^* , de la siguiente forma $\forall k, l : (A^*)_{kl} = \overline{a_{lk}}$

Definición 4. Definimos el espacio de las matrices hermiticas de tamaño $n \times n$ como:

$$\text{Herm}_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) : A = A^*\}$$

Problema 6. Muestre que el espacio $\text{Herm}_n(\mathbb{C})$ son un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n^2

Definición 5. Dado $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ se define:

$$\begin{aligned} \alpha_A : \text{Herm}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \text{Herm}_n(\mathbb{C}) \\ B &\mapsto \alpha_A(B) = \frac{1}{2}(AB + BA^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_A : \text{Herm}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \text{Herm}_n(\mathbb{C}) \\ B &\mapsto \beta_A(B) = \frac{1}{2i}(AB - BA^*) \end{aligned}$$

Problema 7. Muestre que α_A y β_B conmutan entre si

Problema 8. Muestre que si α_A y β_B tienen un vector propio comun entonces A tiene un valor propio en $\mathbb{C}$

Problema 9. Demuestre que $S_2(\mathbb{R}, 1) \implies S_1(\mathbb{C}, 1)$ utilizando los problemas anteriores

Problema 10. Muestre que el espacio de las matrices simetricas de tamaño $n \times n$ es un sev de $M_{n,n}(\mathbb{K})$ de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$. Denotaremos este sev por $\text{Sym}_n(\mathbb{K})$

Definición 6. Dado $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ se define:

$$\begin{aligned} \phi_A : \text{Sym}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{K}) \\ B &\mapsto \phi_A(B) = \frac{1}{2}(AB + BA^t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_A : \text{Sym}_n(\mathbb{K}) &\rightarrow \text{Sym}_n(\mathbb{K}) \\ B &\mapsto \psi_A(B) = ABA^t \end{aligned}$$

Problema 11. Demuestre que ϕ_A y ψ_A son dos transformaciones lineales que conmutan entre si.

Problema 12. Muestre que si B es un vector propio de ϕ_A y ψ_A entonces $(A^2 + aA + bI_n)B = 0$ para algún $a, b \in \mathbb{K}$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ concluya que A tiene un valor propio.

Problema 13. Demuestre que $S_1(\mathbb{C}, r) \implies S_1(\mathbb{C}, r+1) \forall r \geq 1$ utilizando lo anterior. Y por lo tanto concluya que $S_1(\mathbb{C}, r)$ es verdad $\forall r \geq 1$. Hint: Justifique que $n = 2^k l$ para algún $k \in [1, r]$ y l es impar.

Problema 14. Dado $n \in \mathbb{N}$ escriba $n = 2^k l$ con l impar, justifique porque puede hacer esto. Justifique que $S_1(\mathbb{C}, k+1)$ es verdad y muestre que eso implica que el TFA se cumple.