MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 11 - Transformaciones lineales

P1. ***C2 P3- Lineal 2009-2***

Sea $T : V \to V$ una transformación lineal donde V es un ev de dimensión finita n

a) Sea $T^k = T \circ T \circ \circ \circ T$ k veces para $k \in \{1, .., n\}$

1) Demuestre que $Ker(T^k) \subseteq Ker(T^{k+1})$

Solución:

Sea $x \in Ker(T^k)$ entonces $T^k(x) = 0$ luego $T(T^k(x)) = T(0)$ es decir $T^{k+1}(x) = 0$.

Por tanto $x \in Ker(T^{k+1})$.

Es decir $Ker(T^k) \subseteq Ker(T^{k+1})$

2) Demuestre que $T^{k+1}(V) \subseteq T^k(V)$

Solución:

Sea $y \in T^{k+1}(V)$ entonces $\exists \overline{x} \in V$ tal que: $y = T^{k+1}(\overline{x}) = T^k(T(\overline{x}))$.

Como $T(\overline{x}) \in V$ sea $\overline{y} = T(\overline{x})$ entonces $y = T^k(\overline{y})$.

Por lo tanto $y \in T^k(V)$.

Es decir $T^{k+1}(V) \subseteq T(k)(V)$

3) Demuestre que $dim(T^{k+1}(V)) \leq dim(T^k(V))$

Solución:

Como para todo $m \in \mathbb{N}$ $T^m(V)$ es un ev (es la imagen de T^m) en particular tenemos que $T^{k+1}(V)$ es sev de $T^k(V)$ por estar incluido (parte anterior). Luego tenemos que $dim(T^{k+1}(V)) \leq dim(T^k(V))$

b) Suponga que existe $k_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $T^{k_0+1}(V) = T^{k_0}(V)$. Pruebe que $T^{k_0}(V) = T^k(V)$, $\forall k \geq k_0$

Solución:

Por inducción sobre k.

Caso base $k = k_0$, claramente se cumple.

Supongamos que $T^{k_0}(V) = T(k_0 + k)(V)$. Por demostrar que $T^{k_0}(V) = T^{k_0+k+1}(V)$

Notamos que:

$$\begin{aligned} T^{k_0+k+1}(V) &= T^{1+k_0+k}(V) \\ &= T(T^{k_0+k}(V)) \\ &= T(T^{k_0}(V)) \text{ HI} \\ &= T^{k_0+1}(V) \\ &= T(V) \text{ Supuesto sobre } k_0 \end{aligned}$$

Con esto tenemos que $k+1$ es cierto. Por lo tanto se cumple lo pedido.

c) Demuestre que el k_0 de la parte anterior exsite.

Solución:
Supongamos que no existe luego tenemos que $T^k(V) \neq T^{k+1}(V), \forall k \in \{1, ..., n\}$.

Luego por la parte 2 tenemos que $T^{k+1}(V) \subsetneq T^k(V)$ lo cual significa que $dim(T^{k+1})(V) < dim(T^k(V))$.

Como son numeros naturales tenemos que $dim(T^k(V)) \leq dim(T^{k-1}(V)) - 1$.

Ahora inductivamente podemos notar que $dim(T^k(V)) \leq dim(T(V)) - k + 1$

Ahora pongamosnos en casos sobre $T(V)$. Si $dim(T(V)) = n$ tenemos que $T(V) = V$ es decir $T^2(V) = T(T(V)) = T(V)$. Y por lo tanto $k_0 = 1$ sirve para lo buscado. Contradicción

Luego $dim(T(V)) \leq n - 1$. Es decir tenemos que: $dim(T^k(V)) \leq n - 1 - k + 1 = n - k$.

Asi tomando $k = n$ tenemos que $T^n(V) = \{0\}$ es decir $T^{n+1}(V) = T(T^n(V)) = T(\{0\}) = \{0\} = T^n(\{0\})$. Y por lo tanto $k_0 = n$ sirve. Contradicción.

Concluimos que existe k_0.

d) Sea $U = T^n(V)$. Pruebe que $S : U \to U$ dado por $S(x) = T(x)$ es un isomorfismo.

Solución:
En este contexto un isomorfismo es una función lineal biyectiva.

En primer lugar S es lineal porque $S = T$ en $U = T^n(V) \subseteq V$ es decir es una función lineal restringida en su dominio, lo cual siguie siendo lineal.
Ahora notamos que S es una función lineal de un espacio a si mismo luego tenemos que:

$$S \text{ es biyectiva} \iff S \text{ es inyectiva} \iff S \text{ es epiyectiva}$$

Probemos epiyectividad. Es decir que $S(U) = U$.

$$\begin{aligned} S(U) &= T(U) \\ &= T(T^n(V)) \\ &= T^{n+1}(V) \\ &= T^n(V), \text{ por las partes anteriores} \\ &= U \end{aligned}$$

Concluimos que S es epiyectiva y por lo tanto biyectiva y entonces es isomorfismo.

La razón "por las partes anteriores" es porque en c mostramos que existe un $k_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $T^{k_0+1} = T^{k_0}$. Nosotos lo "usamos" con $k_0 = n$. Es decir si $k_0 = n$ se cumple por definición. Si $k_0 < n$ entonces por la parte b igual se cumple para n.

P2. ***C2 P3- Lineal 2008-2***
Sea V un espacio vectorial de dimension finita $n \in \mathbb{N}$

a) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal que satisface $Ker(T) = Im(T)$. Demuestre que:

1) $T^2 = 0$

Solución:
Sea $x \in V$ luego $T(x) \in Im(T)$ entonces $T(x) \in Ker(T)$ por hipotesis.
Por tanto $T^2(x) = T(T(x)) = 0$, donde la ultima igualdad se tiene por $T(x) \in Ker(T)$ es decir $T^2(x) = 0, \forall x \in V$ ie $T^2 = 0$

2) n es par y el rango de T es $\frac{n}{2}$

Solución:
Por TNI sabemos que $dim(V) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 2dim(Img(T))$ donde la ultima igualdad se tiene por $Im(T) = Ker(T)$.

Luego tenemos que $dim(Im(T)) = \frac{n}{2}$.

Como $dim(Im(T)) \in \mathbb{N}$ concluimos que n es divisible por 2, es decir es par.

Ademas el rango de T se define por $dim(Im(T))$ es decir el rango de T es $\frac{n}{2}$. Concluyendo lo pedido.

b) Sea $F : V \to V$ una transformación lineal que satisface $F \circ F = 0$ demuestre que:

1) $Im(F) \subseteq Ker(F)$

Solución:
Sea $y \in Im(F)$ es decir $\exists x$ tal que $y = F(x)$. Luego tenemos que $F(y) = F(F(x)) = F^2(x) = 0$ entonces $y \in Ker(F)$. Es decir $Im(F) \subseteq Ker(F)$.

2) Si n es par y el rango de F es $\frac{n}{2}$ entonces $Im(F) = Ker(F)$

Solución:
Como el rango de F es $\frac{n}{2}$ luego tenemos que $dim(Im(F)) = \frac{n}{2}$. Ahora por TNI concluimos que:

$$dim(V) = dim(Im(F)) + dim(Ker(F))$$

Es decir que $n = \frac{n}{2} + dim(Ker(F))$ es decir $dim(Ker(F)) = \frac{n}{2}$.

En resumen tenemos que $Im(F) \subseteq Ker(F)$ por parte anterior y $dim(Ker(F)) = dim(Im(F))$ concluimos que $Ker(F) = Im(F)$

P3. ***C1 P2- Lineal 2016-2***
Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta $L \in \mathbb{R}^3$ consideremos Q la proyección de P sobre L. Se define el punto simétrico de P con respecto a L como aquel punto P_s que satisface: Si P esta en L entonces $P_s = Q$, si P no esta en L entonces:

$$dist(P, L) = dist(Ps, L) \text{ y además } P_s \text{ esta en la recta que pasa por } P \text{ y } Q$$

donde $dist(P, L) = ||P - Q||$, es la distancia de P a L.

a) Demuestre que $P_s = P + 2(Q - P)$

Solución:

Para esto basta verificar que $||P - Q|| = ||[P + 2(Q - P)] - Q||$ y que $P + 2(Q - P)$ esta en la recta que pasa por P y Q notamos que esta recta esta dada por $L : P + \lambda(Q - P)$ luego basta tomarse $\lambda = 2$. Asi solo falta verificar la igualdad de las normas:

$$\begin{aligned} &||P + 2(Q-P) - Q|| \\ &= ||P + 2Q - 2P - Q|| \\ &= ||Q - P|| \\ &= ||P - Q|| \end{aligned}$$

Luego P_s en efecto esta dado por $P + 2(Q - P)$.

Formalmente también se tiene que verificar su unicidad, en el control no lo demuestran pero el argumento es del orden: ambos pasan por la misma recta luego si P_{s1} y P_{s2} son dos simetricos tenemos que $P_{si} = Q + \lambda_i(P - Q)$ asi tenemos que:

$$\begin{aligned} ||P_{si} - Q|| &= ||P - Q|| \\ ||\lambda_i(P - Q)|| &= ||P - Q|| \\ |\lambda_i| \cdot ||P - Q|| &= ||P - Q|| \end{aligned}$$

Luego si $P = Q$ no hay nada que hacer ya que P esta en la recta y por tanto $P_{si} = Q = P$ siempre (por enunciado). En otro caso tenemos que $||P - Q|| \neq 0$.

Es decir $\lambda_i = \pm 1$.

Si $\lambda_1 = 1$ significa que $P_{s1} = P$ con lo cual estamos en el caso anterior, es decir que $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

Luego, en el otro caso, tenemos que ambos tienen que cumplir que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ es decir $P_{s1} = P_{s2}$.

b) Dados $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y la recta L que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene como vector director el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcule Q y P_s.

Solución:
Primero observamos que:

$$L : \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

En segundo lugar recordamos que se tiene la siguiente formula de proyección sobre una recta L:

$$Q = r + \langle P - r, d \rangle \frac{d}{||d||^2}$$

Donde r es un punto de la recta, d el director de la recta y P el punto a proyectar. Identifcamos que:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \rangle \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \right\|^2} \\ &= \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lugo identificamos que:

$$P_s = P + 2(Q - P) = 2Q - P = 2 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\10\\4\end{pmatrix}$$

c) Dado el plano π de ecuación cartesiana $3x - 2y + 5z = 1$, consideramos el conjunto de los puntos simétricos de puntos del plano π, con respecto la recta L dada en la partie b). Este conjunto de puntos es un plano (no lo pruebe). De una ecuación de este nuevo plano.

Solución:
Para esto estudiemos como son los elementos del plano, para posteriormente proyectarlos y estudiar como se comportan las proyecciones.

Sea $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \pi$ luego $3x - 2y + 5z = 1$ es decir $x = 1 + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{1}{3} + \frac{2}{3}y - \frac{5}{3}z\\ y\\ z\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{y}{3}\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \frac{z}{3}\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

luego obtenemos que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\frac{1}{3} + 2\lambda - 5u\\ 3\lambda\\ 3u\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora calculamos la proyección sobre la recta de un punto del plano.

$$
\begin{aligned}
Q &= \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+2\lambda-5u\\3\lambda\\3u\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\rangle \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\|^2} \\
&= \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+2\lambda-5u\\3\lambda-2\\3u\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\rangle \frac{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\|^2} \\
&= \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{\frac{1}{3}+2\lambda-5u-3\lambda+2+6u}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{\frac{7}{3}-\lambda+u}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Luego tenemos que:

$$
\begin{aligned}
P_s &= 2Q-P \\
&= 2\left(\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{\frac{7}{3}-\lambda+u}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+2\lambda-5u\\3\lambda\\3u\end{pmatrix} \\
&= 2\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{\frac{7}{3}-\lambda+u}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{3}+2\lambda-5u\\3\lambda\\3u\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix} + \frac{7}{9}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{\lambda}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + \frac{u}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - u\begin{pmatrix}-5\\0\\3\end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\29\\14\end{pmatrix} - \frac{\lambda}{3}\begin{pmatrix}7\\8\\2\end{pmatrix} + \frac{u}{3}\begin{pmatrix}16\\-1\\-7\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Teniendo el plano (Obs: Puede que hayan errores de numeros, no se me dan muy bien para que tengan ojo c:)

P4. ***C1 P3 - Lineal 2008-1***

Sea $P = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el orgien y tiene directores $d_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

a) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1

Solución:
Para esto calculamos primero el vector normal del plano, ya que las proyecciones del plano estan dadas con su vector normal.

$$\begin{aligned}
n &= d_1 \times d_2 \\
&= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= i \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= i + j - k \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego P_0 esta dado por:

$$P_0 = P + \langle r - P \rangle \frac{n}{||n||^2}$$

Donde r es cualquier punto en el plano, podemos tomar $r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Luego:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

b) Calcular la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de Π_1 con le plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$

Solución:

Primero notamos que para Π_1 como $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $0 \in \Pi_1$ se tiene que su ecuación cartesiana esta dada por $x + y - z = 0$. Luego queremos los puntos (x, y, z) tal que cumplan estos dos sistemas a la vez:

$$\begin{aligned}
x + y - z &= 0 \\
x + 2y &= 2
\end{aligned}$$

Luego tenemos que $x = 2 - 2y$ entonces $z = x + y = 2 - 2y + y = 2 - y$ asi tenemos que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2y \\ y \\ 2 - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La cual es la ecuación de la recta buscada.

c) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L

Solución:
Para esto basta remplazar en la formula, si llamamos a esa proyección R tenemos que:

$$R = U + \langle P_0 - U, d\rangle \frac{d}{||d||^2}$$

Donde U es un punto de la rectas, P_0 el vector a proyectar y d el director de la curva.

Notamos que $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ es una opción valida. Y que $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $||d|| = \sqrt{6}$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} R &= U + \langle P_0 - U, d\rangle \frac{d}{||d||^2} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{6} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\langle \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{-12}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d) Calcule la distancia de P a la recta L.

Solución:
Notamos que la distancia entre un punto y la recta esta dado por la distancia entre el punto y su proyección. En este caso por la distancia entre P y R

$$dist(P, L) = dist(P, R) = ||P - R|| = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5}$$

P5. ***C2 P2- Lineal 2008-2***
Sea $B \subseteq \mathbb{R}^4$ dado por $B = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}$ y $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal que satisface $T(1,0,0,0) = (1,1,1,0)$, $T(1,1,0,0) = (1,1,1,1)$ y $Im(T) = Ker(T)$

a) Pruebe que B es base de $\mathbb{R}^4$

Solución:
Por definición estudiemos el sistema:

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

Matricialmente es el sistema:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{pmatrix} = 0$$

La cual esta escalonada y no tiene ceros en la diagonal luego el sistema tiene solución única y por lo tanto son vectores li.

Son 4 vectores li de $\mathbb{R}^4$ un espacio de dimensión 4 luego son base de $\mathbb{R}^4$.

b) Demuestre que una base de $Ker(T)$ esta dada por $(1,1,1,0),(1,1,1,1)$

Solución:
Como $Ker(T) = Im(T)$ entonces tenemos que $dim(Ker(T)) = dim(Im(T))$, luego por TNI tenemos que:

$$4 = dim(\mathbb{R}^4) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) = 2dim(Ker(T))$$

Luego $dim(Ker(T)) = 2$.

Ahora $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ son elementos que pertenecen a la imagen y por lo tanto pertenecen al $Ker(T)$.

Luego si estos elementos son li son base del $Ker(T)$ por ser de dimensión 2.

Observamos que estos vectores son sub conjunto de la base B, luego son li.

Por tanto son base de $Ker(T)$

c) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T

Solución:
Como $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, es decir va de un espacio en si mismo tenemos que:

T es biyectiva sii T es inyectiva ssi T es epiyectiva

Vimos que $dim(Ker(T)) = 2$ y como T es lineal se tiene que:

T es inyectiva ssi $Ker(T) = 0$

Luego T no es ni inyectiva ni epiyectiva ni biyectiva.

d) Calule la matriz representante cuando se ocupa B como base de partida y llegada

Solución:
Para esto obsercamos que:

1) $T(1,0,0,0) = 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (1,1,0,0) + 1 \cdot (1,1,1,0) + 0 \cdot (1,1,1,1)$
2) $T(1,1,0,0) = 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (1,1,0,0) + 0 \cdot (1,1,1,0) + 1 \cdot (1,1,1,1)$
3) $T(1,1,1,0) = 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (1,1,0,0) + 0 \cdot (1,1,1,0) + 0 \cdot (1,1,1,1)$
4) $T(1,1,1,1) = 0 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (1,1,0,0) + 0 \cdot (1,1,1,0) + 0 \cdot (1,1,1,1)$

Luego la matriz buscada esta dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Calcule la matriz representante cuando se ocupa la base canonica de partida y llegada

Solución:
Para esto Calculamo cuanto es la imagen de la base canonica:

1) $T(1,0,0,0) = (1,1,1,0)$ (enunciado)
2) $T(0,1,0,0) = (0,0,0,1)$ por:

$$T(0,1,0,0) = T(1,1,0,0) - T(1,0,0,0) = (1,1,1,1) - (1,1,1,0) = (0,0,0,1)$$

3) $T(0,0,1,0) = (-1,-1,-1,-1)$ por:

$$T(0,0,1,0) = T(1,1,1,0) - T(1,1,0,0) = (0,0,0,0) - (1,1,1,1) = (-1,-1,-1,-1)$$

4) $T(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$ por:

$$T(0,0,0,1) = T(1,1,1,1) - T(1,1,1,0) = (0,0,0,0) - (0,0,0,0) = (0,0,0,0)$$

Luego la matriz representante tiene como columnas las imagenes de la transformación y por lo tanto considerando el orden usual de la base canonica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

P6. ***C6 P2 (i) y (ii) - Algebra 2001***
Sea $T : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2}$ tal que $T(A) = \frac{A+A^t}{2}$

a) Muestre que T es lineal

Solución:
Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $A, B \in \mathcal{M}_{2,2}$ luego:

$$\begin{aligned} T(\lambda A + B) &= \frac{(\lambda A + B) + (\lambda A + B)^t}{2} \\ &= \frac{\lambda A + B + \lambda A^t + B^t}{2} \\ &= \frac{\lambda A + \lambda A^t}{2} + \frac{B + B^t}{2} \\ &= \lambda \frac{A + A^t}{2} + \frac{B + B^t}{2} \\ &= \lambda T(A) + T(B) \end{aligned}$$

b) Calcule el $Ker(T)$ y $dim(Im(T))$

Solución:
Estudiemos el Ker de la transformación:

$$\begin{aligned} T(A) &= 0 \\ \frac{A+A^t}{2} &= 0 \\ A+A^t &= 0 \\ A &= -A^t \end{aligned}$$

Es decir el ker de la transformación son las matrices antisimetricas. En $\mathcal{M}_{2,2}$ las matrices anti simetricas son de la forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

Luego un generador del Ker(T) esta dado por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Este generador es no nulo por lo tanto es li. Luego por definición es base del Ker T.

De esto conclumios que $dim(Ker(T)) = 1$. Ahora por TNI tenemos que:

$$\begin{aligned} dim(\mathcal{M}_{2,2}) &= dim(Ker(T)) + dim(Im(T)) \\ 2 \cdot 2 &= 1 + dim(Im(T)) \\ 3 &= dim(Im(T)) \end{aligned}$$

Por tanto $dim(Im(T)) = 3$

c) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T

Solución:
Como las dimensiones del espacio de partida y de llegada tienen la misma dimensión se tiene que:

T es biyectiva sii T es inyectiva ssi T es epiyectiva

Como $dim(Ker(T)) = 1 \neq 0$ se tiene que T no es inyectiva y por lo tanto no es epiyectiva ni biyectiva.

d) Considere la siguiente base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcule la matriz representante de T cuando se usa B como la base del espacio de salida y llegada.

Solución:
Para esto hay que calcular la imagen de la base:

1) $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^t\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}^t\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

3) $T\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}^t\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

4) $T\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ (Por que es el generador del Ker)

Luego tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} &= 1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} &= 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} &= 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix} &= 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego la matriz buscada esta dada por:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

e) Calcule la matriz representante a partir de la base canonica de las matrices.

Solución:
Para esto hay que calcular la imagen de la base:

1) $T\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ (Ya calculada)

2) $T\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^t\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$$

3) $T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}^t\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$$

4) $T\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ (Ya calculada)

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned}
T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} &= 1\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} &= 0\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} &= 0\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\\
T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} &= 0\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego la matriz buscada es:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1/2&1/2&0\\0&1/2&1/2&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

P7. ***C6 P3 - Algebra 2003***

a) Sea $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que $T(1,1,0,0)=(0,1,0,-1)$ y $T(1,0,1,0)=(1,1,1,0)$. De una expresión para T sabiendo que $Im(T)=Ker(T)$.

Solución:
Para este tipo de problemas nuestra esperanza que nos da el corazoncito es que el conjunto:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Sea l.i. esto porque:

1) Son 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ de ser li son base.
2) Si son base, los primeros dos me dan completamente la imagen de T
3) Si son base, como la imagen de T es el Ker con los ultimos dos tengo completamente determinado Ker

Luego veamos si son base. Para esto estudiamos:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Escalonando obtenemos la siguiente matriz:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Y como no hay ceros en la diagonal conlcuimos que la matriz asociada a los vectores es invertible y por lo tanto son li.

Ahora como queremos dar una expresión para T buscamos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es decir estamos resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} a+b+c &= x \\ a+c+d &= y \\ b+d &= z \\ -c &= w \end{aligned}$$

Con el cual despejando obtenemos que:

$$\begin{aligned} a &= x-z \\ b &= x-y-w \\ c &= -w \\ d &= z+y+w-x \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} &= aT\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + bT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + cT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + dT\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= aT\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + bT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (x-z)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (x-y-w)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-y-w \\ 2x-y-w-z \\ x-y-w \\ z-w \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal dada por. $T(1,1,1) = (2\beta, \alpha, 0)$, $T(0,-1,1) = (0, \alpha, \beta)$ y $T(0,0,1) = (\beta, \alpha-1, 0)$

1) Encuentre los valores de α y β, tales que la aplicación T no es inyectiva

Solución:
Primero estudiemos T. Es decir veamos si lo que la genera, es decir:

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

es un generador de $\mathbb{R}^3$. De serlo, al igual que antes podemos determinar completamente T para estuidarla.

Para esto intentaremos directamente resolver:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\begin{aligned} x &= a \\ y &= a-b \\ z &= a+b+c \end{aligned}$$

Es decir $a = x$, $b = x-y$, $c = y+z-2x$. Luego en efecto son base $\mathbb{R}^3$ por que todo sistema tiene solución única, en particular el homogeneo.

Ahora esto quiere decir que:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} &= aT\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + bT\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + cT\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix}2\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}\beta\\\alpha-1\end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix}2\beta\\\alpha\\0\end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix}0\\\alpha\\\beta\end{pmatrix} + (y+z-2x)\begin{pmatrix}\beta\\\alpha-1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\beta y+\beta z\\2x-y+(\alpha-1)z\\\beta x-\beta y\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}0 & \beta & \beta\\2 & -1 & \alpha-1\\\beta & -\beta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego T es inyectiva ssi la matriz representante es invertible. Por lo tanto T no es inyectiva ssi la matriz no es invetible. Para esto estudiemos el sistema homgeneo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix}0 & \beta & \beta\\2 & -1 & \alpha-1\\\beta & -\beta & 0\end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix}2 & -1 & \alpha-1\\0 & \beta & \beta\\\beta & -\beta & 0\end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix}2 & -1 & \alpha-1\\0 & \beta & \beta\\0 & -\frac{\beta}{2} & -\frac{\beta(\alpha-1)}{2}\end{pmatrix} \\ &\to \begin{pmatrix}2 & -1 & \alpha-1\\0 & \beta & \beta\\0 & 0 & \frac{\beta}{2}-\frac{\beta(\alpha-1)}{2}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego buscamos que $\beta = 0$ ó que $\frac{\beta}{2} - \frac{\beta(\alpha-1)}{2} = 0$.

Ahora reescribiendo lo ultimo es lo mismo que: $\frac{\beta}{2}(2-\alpha)=0$

Luego tenemos que T no es inyectiva ssi $\beta=0$ ó $\alpha=2$.

2) Para $\alpha=1$ y $\beta=0$ encuentre una base y la dimensión para $Ker(T)$ e $Im(T)$

Solución:
Por lo anterior tenemos que T esta dado por:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\2&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Luego $(x,y,z)\in Ker(T)$ ssi $2x-y=0$ es deicr el $Ker(T)$ es ta dado por $(x,2x,z)$ luego un generador del $Ker(T)$ es:

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

los cuales son li. Luego son base y por lo tanto $dim(Ker(T))=2$.

Por el TNI como $dim(\mathbb{R}^3)=3$ concluimos que $dim(Im(T))=1$. ASi tomando $(x,y,z)=(0,-1,0)$ tenemos que un vector de la imagen esta dado por $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ y como es no nulo, y por $dim(Im(T))=1$ concluimos que es base de la imagen.

3) ¿Para este caso T es epiyectiva, biyectiva?

Solución:
T parte y llega a un espacio de la misma dimensión luego se tiene que:

T es biyectiva sii T es inyectiva ssi T es epiyectiva

Como $dim(Ker(T))=2\neq 0$ entonces T no es inyectiva y por ende no es ni epiyectiva ni biyectiva.

P8. ***C5 P3 - Algebra 1997***

Sea $T: P_3(\mathbb{R})\to P_3(\mathbb{R})$ dado por:

$$T(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)=a_0+(2a_1+a_2)x+(2a_2+a_3)x^2+2a_3x^3$$

a) Probar que T es una transformación lineal biyectiva

Solución:
Sea $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$, $q(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ por demostrar que $T(\lambda p+q)[x]=\lambda T(p)[x]+T(q)[x]$.

$$\begin{aligned}
T(\lambda p+q) &= T(\lambda(a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3)+b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3)\\
&= T(\lambda a_0+b_0\{\lambda a_1+b_1\}x+\{\lambda a_2+b_2\}x^2+\{\lambda a_3+b_3\}x^3)\\
&= \lambda a_0+b_0+(2(\lambda a_1+b_1)+\lambda a_2+b_2)x^2+(2(\lambda a_2+b_2)+\lambda a_3+b_3)x^2+2(\lambda a_3+b_3)x^3\\
&= \lambda(a_0+(2a_1+a_2)x+(2a_2+a_3)x^2+2a_3x^3)+(b_0+(2b_1+b_2)x+(2b_2+b_3)x^2+2b_3x^3)\\
&= \lambda T(p)+T(q)
\end{aligned}$$

b) Si id es la transformación identidad del espacio $P_3(\mathbb{R})$ pruebe que $(T-2id),(T-2id)^2,(T-2id)^3$ y $T-id$ son transformaciones lineales

Solución:

1) $T-2id$: Notamos que es combinación lineal de funciones lineales, lo cual sigue siendo una función lineal (ejercicio de mostrar que combinación lineal de funciones lineales es una función lineal).
2) $(T-2id)^2$: Observamos que en este contexto $(T-2id)^2$ representa componer funciones ya que no estamos diciendo $[f(x)]^2$ si no que f^2 que visto como una estructura algebraica es la operación $\circ$. Ahora sabemos que composición de lineales es lineal y que $T-2id$ es lineal. Luego $(T-2id)^2$ es lineal.
3) $(T-2id)^3$: Mismo argumento anterior.
4) $(T-id)$: Combinación lineal de funciones lineales.

c) Encontrar bases y dimensiones de $Ker(T-2id), Ker(T-2id)^2$ y $Ker(T-2id)^3$

Solución:

1) $Ker(T-2id)$:

$$\begin{aligned}
p\in Ker(T-2id) &\iff (T-2id)(p)=0\\
&\iff T(p)-2p=0\\
&\iff a_0+(2a_1+a_2)x+(2a_2+a_3)x^2+2a_3x^3-(2a_0+2a_1x+2a_2x^2+2a_3x^3)=0\\
&\iff -a_0+a_2x+a_3x^2=0
\end{aligned}$$

Luego $a_0=a_2=a_3=0$ por lo tanto $p\in Ker(T-2id) \iff p(x)=a_1x$ es decir una base del $Ker(T-2id)$ es $\{x\}$ y por ende es de dimensión 1.

2) $Ker(T-2id)^2$

$$\begin{aligned}
p\in Ker(T-2id)^2 &\iff (T-2id)^2(p)=0\\
&\iff (T-2id)[T(p)-2p]=0\\
&\iff (T-2id)[-a_0+a_2x+a_3x^2]=0\\
&\iff T[-a_0+a_2x+a_3x^2]-2(-a_0+a_2x+a_3x^2)=0\\
&\iff -a_0+(2a_2+a_3)x+2a_3x^2-2(-a_0+a_2x+a_3x^2)=0\\
&\iff -a_0+2a_2x+a_3x+2a_3x^2+2a_0-2a_2x-2a_3x^2=0\\
&\iff a_0+a_3x=0
\end{aligned}$$

Luego $a_0=a_3=0$ por lo tanto $p\in Ker(T-2id)^2 \iff p(x)=a_1x+a_2x^2$ luego $\{x,x^2\}$ son generadores del ker y por ser parte de la base canonica son base del ker. Por tanto la dimensión del ker es 2.

3) $Ker(T-2id)^3$

$$\begin{aligned}
p\in Ker(T-2id)^3 &\iff (T-2id)^3(p)=0\\
&\iff (T-2id)[\{T-2id\}^2(p)]=0\\
&\iff (T-2id)[a_0+a_3x]=0\\
&\iff T[a_0+a_3x]-2(a_0+a_3x)=0\\
&\iff a_0+2a_3x-2a_0-2a_3x=0\\
&\iff -a_0=0
\end{aligned}$$

Luego $a_0=0$ por lo tanto $p\in Ker(T-2id)^3 \iff p(x)=a_1x+a_2x^2+a_2x^3$ luego $\{x,x^2,x^3\}$ son generadores del ker y por ser parte de la base canonica son base del ker. Por tanto la dimensión del ker es 3.

d) Probar que $P_3(\mathbb{R}) = Ker(T-2id)^3 \bigoplus Ker(T-id)$

Solución:
Calculemos el $Ker(T-id)$.

$$\begin{aligned} p \in Ker(T-id) &\iff (T-id)(p) = 0 \\ &\iff T(p) - p = 0 \\ &\iff a_0 + (2a_1+a_2)x + (2a_2+a_3)x^2 + 2a_3x^3 - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 0 \\ &\iff (a_1+a_2)x + (a_2+a_3)x^2 + a_3x^3 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $a_3 = 0$, $a_2 + a_3 = 0$ y $a_1 + a_2 = 0$. Como $a_3 = 0$ significa que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Por lo tanto $p \in Ker(T-id) \iff p(x) = a_0$ y por ende una base del ker es $\{1\}$.

Veamos que suman. Estos espacios suman porque juntos realizan la base canonica. Es decir $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = q(x) + r(x)$, donde $q(x) = a_0 \in Ker(T-id)$, $r(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^2 \in Ker(T-2id)^3$.

Son suma directa por que si $p \in Ker(T-id) \cap Ker(T-2id)^3$, al $p \in Ker(T-id)$ entonces $p(x) = a_0$. A su vez $p \in Ker(T-2id)^3$ significa $p(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ luego tenemos que $a_0 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ es decir $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ luego $p = 0$. Por lo tanto son suma directa.

P9. ***C1 P2 - Lineal 2012-3***
Una matriz A con coeficientes reales se dice **positiva-definida** si es simétrica y $x^tAx > 0\ \forall x \neq 0$. Pruebe que:

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es positiva-definida

Solución:
Calculemos Por definición:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x+2y-z \\ -y+2z \end{pmatrix} \\ &= x(2x-y) + y(-x+2y-z) + z(-y+2z) \\ &= 2x^2 - xy - yx + 2y^2 - zy - zy + 2z^2 \\ &= 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2zy + 2z^2 \\ &= x^2 + (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2zy + z^2) + z^2 \\ &= x^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 + z^2 \end{aligned}$$

Luego estudiemos la condición par que esa expresión sea mayor estricta que cero. Si $x \neq 0$ ó $z \neq 0$ se tiene la desigualdad estricta. Si $x = 0 = z$ entonces tenemos que la expresión es $2y^2$ luego si $y \neq 0$ se tiene la desigualdad estricta. Como $x \neq 0$ significaque hay alguno de estos que no es cero por lo tanto se tiene la desigualdad estricta. Luego es positiva-definida.

b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es dada por $f(x) = x^tAx$ con A matriz simétrica. Entonces A es positiva-definida ssi:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n x \neq y, \lambda \in (0,1)$$

Solución:
Primero notemos que $f(x) = x^tAx = \langle x, Ax \rangle = x \bullet Ax$ Luego demostremos por doble implicancia.

$\longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x+(1-\lambda)y) &= (\lambda x+(1-\lambda)y)\bullet[A(\lambda x+(1-\lambda)y)]\\
&= (\lambda x+(1-\lambda)y)\bullet[A\lambda x+A(1-\lambda)y)]\\
&= \lambda x\bullet[A\lambda x+A(1-\lambda)y)]+(1-\lambda)y\bullet[A\lambda x+A(1-\lambda)y)]\\
&= \lambda x\bullet A\lambda x+\lambda x\bullet A(1-\lambda)y+(1-\lambda)y\bullet A\lambda x+(1-\lambda)y\bullet A(1-\lambda)y\\
&= \lambda^2 x\bullet Ax+\lambda(1-\lambda)x\bullet Ay+\lambda(1-\lambda)y\bullet Ax+(1-\lambda)^2 y\bullet Ay
\end{aligned}
$$

Ahora notamos que $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)=\lambda x\bullet Ax+(1-\lambda)y\bullet Ay$

Ahora estudiemos que pasa con la resta:

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x+(1-\lambda)y)-(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)) &= \lambda^2 x\bullet Ax+\lambda(1-\lambda)x\bullet Ay+\lambda(1-\lambda)y\bullet Ax\\
&+ (1-\lambda)^2 y\bullet Ay-(\lambda x\bullet Ax+(1-\lambda)y\bullet Ay)\\
&= \lambda(\lambda-1)x\bullet Ax+\lambda(\lambda-1)x\bullet Ay+\lambda(1-\lambda)y\bullet Ax\\
&- (1-\lambda)\lambda y\bullet Ay\\
&= \lambda(\lambda-1)[x\bullet Ax-y\bullet Ax-x\bullet Ay+y\bullet Ay]\\
&= \lambda(\lambda-1)[x-y]\bullet A[x-y]\\
&= \lambda(\lambda-1)[x-y]^t A[x-y]
\end{aligned}
$$

Por hipotesis $[x-y]^t A[x-y]>0$ tambien $\lambda\geq 0$ pero $\lambda-1<0$. Luego tenemos que:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)-(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y))<0$$

Es decir:

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)<\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Para $\longleftarrow$ notamos que nada nos impide tomar $y=0$ y que $f(y)=0$ luego tenemos que:

$$f(\lambda x)<\lambda f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x) &< \lambda f(x)\\
\lambda x\bullet A\lambda x<\lambda(x\bullet Ax)\\
\lambda^2 x\bullet Ax<\lambda x\bullet Ax\\
0<\lambda(1-\lambda)x\bullet Ax
\end{aligned}
$$

Como $\lambda>0$ y $1-\lambda>0$ concluimos que $x\bullet Ax>0\forall x\neq 0$ que es lo que queriamos probar.

c) Si B es invertible y simétrica entonces B^2 es positiva-definida.

Solución:
Estudiemoslo por definición:

$$
\begin{aligned}
x^t B^2 x &= x^t BBx\\
&= (B^t x)^t Bx\\
&= \langle B^t x, Bx\rangle\\
&= \langle Bx, Bx\rangle \text{ } B \text{ es simetrica}\\
&= ||Bx||^2 \text{ definición}
\end{aligned}
$$

Luego sabemos que $||y||=0 \iff y=0$ es decir $||y||>0 \iff y\neq 0$.

Asi basta probar que $Bx \neq 0$. Estudiemos el sistema $Bx = 0$, como B es invertible el sistema tiene solución única $x = 0$. Para la definición nos piden $x \neq 0$.

Luego $Bx \neq 0$ asi tenemos que $||Bx|| > 0$ demostrando lo pedido.

P10. ***C6 P3 (ii), (iii) y (iv) - Algebra 1999***

a) Sea $L : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una transformación lineal. Probar que existe una matriz $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que para toda $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ se tiene:

$$L(A) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii}$$

Solución:
Para esto consideremos e_{ij} como la matriz que tiene un 1 en la posición (i, j) y 0 en el resto.
Luego tenemos que $A = \sum_{i,j} a_{ij} e_{ij}$.

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} L(A) &= \sum_{ij} a_{ij} L(e_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} L(e_{ij}) \end{aligned}$$

De esto la intución es tomar algo del estilo: $C = (L(e_{ij}))_{ij}$, luego tenemos que:

$$\begin{aligned} L(A) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} L(e_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_{ij} a_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} \text{ Donde } b_{ij} = c_{ji} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (B \cdot A)_{jj} \end{aligned}$$

Donde $B = (c_{ji})_{ij} = (L(e_{ji}))_{ij}$

b) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una matriz simetrica tal que $x^t A x \geq 0$. Pruebe que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $\exists v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ que cumple $Av = \lambda v$ entonces $\lambda \geq 0$

Solución:
Notamos que $x^t A x \geq 0$ luego $\langle x, Ax \rangle \geq 0$, esto para todo valor de x. En particular para v luego:

$$\begin{aligned} x^tAx \geq 0 &\iff \langle x, Ax\rangle \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\implies \langle v, Av\rangle \geq 0 \\ &\iff \langle v, \lambda v\rangle \geq 0 \\ &\iff \lambda\langle v, v\rangle \geq 0 \\ &\iff \lambda||v||^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Como, por hipotesis, $v \neq 0$ entonces $||v| \neq 0$ luego concluimos que $\lambda \geq 0$.

c) Sea $T : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $T(M) = AM$, donde $A \in \mathcal{M}_{nn}$ es una matriz fija. Probar que T es isomorfismo ssi A es invertible.

Solución:
En este sentido un ismorfismo es una función lineal que es biyectiva. Luego veamos que T **siempre** es lineal, sean $M, B \in \mathcal{M}_{nn}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$T(\lambda M + B) = A(\lambda M + B) = \lambda AM + AB = \lambda T(M) + T(B)$$

Luego T siempre es lineal. Para esto basta ver que sea biyectiva. Como T va de un espacio vectorial a si mismo, en particular son espacios vectoriales de misma dimensión luego para la implicancia a la izquierda basta porbar que T es epiyectiva ó inyectiva.

Supongamos entonces que A es invertible. Luego es epiyectiva porque dado $M \in \mathcal{M}_{nn}$ se tiene que $L(A^{-1}M) = A(A^{-1}M) = IM = M$, luego es epiyectiva y por lo tanto biyectiva, luego es isomorfismo.

Supongamos entonces que T es biyectiva luego para $I \in \mathcal{M}_{nn}$, $\exists! M \in \mathcal{M}_{nn}$ tal que $I = AM$ luego por ser matrices cuadradas se tiene que M es la inversa de A.

P11. ***C2 P1- Lineal 2007-2***

a) Considere la transformación $T : P_2 \to P_4$ $T[p](x) = (x^2 + x + 1)p(x)$

1) Demuestre que T es lineal

Solución:
Sea $p, q \in P_2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ luego:

$$T(\lambda p + q)[x] = (x^2+x+1)(\lambda p(x)+q(x)) = \lambda(x^2+x+1)p(x)+(x^2+x+1)q(x) = \lambda T(p)[x]+T(q)[x]$$

Luego es lineal

2) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$

Solución:
$p \in Ker(T) \iff T(p)[x] = 0$
Luego sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Estudiemos $T(p)[x] = 0$

$$\begin{aligned} (x^2+x+1)p(x) = 0 &\iff (x^2+x+1)(a_0+a_1x+a_2x^2) = 0 \\ &\iff a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0 \\ &\iff a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + (a_1+a_2)x^3 + a_2x^4 = 0 \end{aligned}$$

Luego $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ y por lo tanto $Ker(T) = \{0\}$

3) Determina una base de $Im(T)$ y calcule el rango de T

Solución:
Notemos que:

$$T(p)(x) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_0 + a_1 + a_2)x^2 + (a_1 + a_2)x^3 + a_2x^4$$

o en otros terminos:

$$T(p)(x) = a_0(1 + x + x^2) + a_1(x + x^2 + x^3) + a_2(x^2 + x^3 + x^4)$$

Luego la imagen esta generada por $\{1 + x + x^2, x + x^2 + x^3, x^2 + x^3 + x^4\}$
Ahora por TNI tenemos que $dim(P_2) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$ y como $dim(Ker(T))$ se tiene que $dim(Im(T)) = 3$. Luego el conjunto que tenemos genera la imagen y son 3 vectores luego son li, por ende son base. Y recordamos que el rango es la dimensión de la imagen que es 3.

4) Estude inyectividad y epiyectividad de T. Estudie además si T es isomorfismo

Solución:
Como la dimensión del espacio de llegada es mas grande que el de salida tenemos que la transformación **no** puede ser epiyectiva.

Como el $Ker(T) = \{0\}$ se tiene que la transformación es inyectiva.

Como no es biyectiva T no es isomorfismo.

b) Sean V, W ev sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ Dada una transformación lineal $L : V \to W$ se define su grafo como $Grf(L) = \{(v, L(v)) \in V \times W : v \in V\}$

1) Pruebe que $Grf(L)$ es un sev de $V \times W$

Solución:
Para esto mostremoslo por la caracterización.

Primero veamos que $Grf(L) \neq \emptyset$, como L es lineal $L(0) = 0$, luego $(0, L(0)) \in Grf(L)$ luego es no vacio.

Sean $(x, L(x)), (y, L(y)) \in Grf(L)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ pdq $\lambda(x, L(x)) + (y, L(y)) \in Grf(L)$

Ahora notamos que: $\lambda(x, L(x)) + (y, L(y)) = (\lambda x + y, \lambda L(x) + L(y))$ que por linealidad de L se tiene que es igual a $(\lambda x + y, L(\lambda x + y))$, luego pertenece al grafo.

2) Pruebe que V y $Grf(L)$ son isomorfos

Solución:
Para esto basta encontrar una función lineal que sea biyectiva entre estos dos espacios.

Proponemos $f(v) = (v, L(v))$

Tenemos que ver que:

a' f es lineal

$$f(\lambda v + u) = (\lambda v + u, L(\lambda v + u)) = (\lambda v + u, \lambda L(v) + L(u)) = \lambda(v, L(v)) + (u, L(u)) = \lambda f(v) + f(u)$$

b' f es inyectivo

$$f(x) = f(y) \implies (x, L(x)) = (y, L(y)) \implies x = y \wedge L(x) = L(y) \implies x = y$$

c' f es epiyectivo

$$\text{Sea } (v, L(v)) \in Grf(L), \text{ luego } f(v) = (v, L(v))$$

Por lo anterior f es isomorfimso.