

MA1102-4 Álgebra Lineal**Profesor:** Jaime San Martín.**Auxiliar:** Sebastián Bustos

Problema extra

Sea $\mathbb{R}^n$. Y sea H un hiperplano de $\mathbb{R}^n$. El objetivo de este problema va a ser caracterizar a los hiperplanos, es decir demostraremos:

$$H \text{ es hiperplano de } \mathbb{R}^n \iff \exists c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \text{ tq } H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle c, x \rangle = 0\}$$

Recordar que H es un hiperplano si es un sev que cumple que $\exists v \in \mathbb{R}^n \setminus H$ tal que $\text{Gen}(H, v) = \mathbb{R}^n$. Donde se define $\text{Gen}(H, v) := \{h + \alpha v : \alpha \in \mathbb{R}, h \in H\}$

La demostración de $\Leftarrow$ la realizamos en auxiliar. Por lo tanto falta ver $\Rightarrow$ para esto siga los siguientes pasos:

Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus H$ algún vector tal que $\text{Gen}(H, v) = \mathbb{R}^n$, lo mantendremos fijo durante el problema.

Considere la siguiente función:

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto T(x) = \alpha \end{aligned}$$

Donde α es algún escalar que cumple $x = h + \alpha v$, donde $h \in H$ y v el vector elegido al principio del problema.

1. Muestre que la función esta bien definida. Esto quiere decir que si $x = h_1 + \alpha_1 v = h_2 + \alpha_2 v$ el valor de la función es independiente de la elección de los α_i, h_i . (En definitiva hay que mostrar que la descomposición es única; $h_1 = h_2$ y $\alpha_1 = \alpha_2$)
2. Muestre que la función es lineal y no nula (no nula significa que $\exists x \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(x) \neq 0$).
3. Muestre que $\text{Ker}(T) = H$
4. Concluya lo pedido