MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 11 - Transformaciones lineales

P1. ***C2 P3- Lineal 2009-2***
Sea $T : V \to V$ una transformación lineal donde V es un ev de dimensión finita n

a) Sea $T^k = T \circ T \circ \circ \circ T$ k veces para $k \in \{1, .., n\}$
 1) Demuestre que $ker(T^k) \subseteq Ker(T^{k+1})$
 2) Demuestre que $T^{k+1}(V) \subseteq T^k(V)$
 3) Demuestre que $dim(T^{k+1}(V)) \subseteq dim(T^k(V))$

b) Suponga que existe $k_0 \in \{1, ..., n\}$ tal que $T^{k_0+1}(V) = T^{k_0}$. Pruebe que $T^{k_0}(V) = T^K(V)$, $\forall k \geq k_0$

c) Demuestre que el k_0 de la parte anterior exsite.

d) Sea $U = T^n(V)$. Pruebe que $S : U \to U$ dado por $S(x) = T(x)$ es un isomorfismo.

P2. ***C2 P3- Lineal 2008-2***
Sea V un espacio vectorial de dimension finita $n \in \mathbb{N}$

a) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal que satisface $Ker(T) = Im(T)$. Demuestre que:
 1) $T^2 = 0$
 2) n es par y el rango de T es $\frac{n}{2}$

b) Sea $F : V \to V$ una transformación lineal que satisface $F \circ F = 0$ demuestre que:
 1) $Im(F) \subseteq Ker(F)$
 2) Si n es par y el rango de F es $\frac{n}{2}$ entonces $Im(F) = Ker(F)$

P3. ***C1 P2- Lineal 2016-2***
Dado un punto $P \in \mathbb{R}^3$ y una recta $L \in \mathbb{R}^3$ consideremos Q la proyección de P sobre L. Se define el punto simétrico de P con respecto a L como aquel punto P_s que satisface: Si P esta en L entonces $P_s = Q$, si P no esta en L entonces:

$$dist(P, L) = dist(Ps, L) \text{ y además } P_s \text{ esta en la recta que pasa por } P \text{ y } Q$$

donde $dist(P, L) = ||P - Q||$, es la distancia de P a L.

a) Demuestre que $P_s = P + 2(Q - P)$

b) Dados $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y la recta L que pasa por $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene como vector director el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcule Q y P_s.

c) Dado el plano π de ecuación cartesiana $3x - 2y + 5z = 1$, consideramos el conjunto de los puntos simétricos de puntos del plano π, con respecto la recta L dada en la partie *b*). Este conjunto de puntos es un plano (no lo pruebe). De una ecuación de este nuevo plano.

P4. ***C1 P3 - Lineal 2008-1***
Sea $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el orgien y tiene directores $d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1

b) Calcular la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de $¶_1$ con le plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$

c) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L

d) Calcule la distancia de P a la recta L.

P5. ***C2 P2- Lineal 2008-2***
Sea $B \subseteq \mathbb{R}^4$ dado por $B = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ y $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal que satisface $T(1,0,0,0) = (1,1,1,0)$, $T(1,1,0,0) = (1,1,1,1)$ y $Im(T) = Ker(T)$

a) Pruebe que B es base de $\mathbb{R}^4$

b) Demuestre que una base de $Ker(T)$ esta dada por $(1,1,1,0),(1,1,1,1)$

c) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T

d) Calule la amtriz representante cuando se ocupa B como base de partida y llegada

e) Calcule la matriz representante cuando se ocupa la base canonica de partida y llegada

P6. ***C6 P3 (i) y (ii) - Algebra 2001***
Sea $T : \mathcal{M}_{2,2} \to \mathcal{M}_{2,2}$ tal que $T(A) = \frac{A+A^t}{2}$

a) Muestre que T es lineal

b) Calcule el $Ker(T)$ y $dim(Im(T))$

c) Estudie inyectividad, epiyectividad y biyectividad de T

d) Considere la siguiente base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcule la matriz representante de T cuando se usa B como la base del espacio de salida y llegada.

e) Calcule la matriz representante a partir de la base canonica de las matrices.

P7. ***C6 P3 - Algebra 2003***

a) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal tal que $T(1,1,0,0) = (0,1,0,-1)$ y $T(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$. De una expresión para T sabiendo que $Im(T) = Ker(T)$.

b) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal dada por. $T(1,1,1) = (2\beta, \alpha, 0)$, $T(0,-1,1) = (0,\alpha,\beta)$ y $T(0,0,1) = (\beta, \alpha - 1, 0)$

1) Encuentre los valores de α y β, tales que la aplicación T no es inyectiva

2) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ encuentre una base y la dimensión para $Ker(T)$ e $Im(T)$

3) ¿Para este caso T es epiyectiva, biyectiva?

P8. ***C5 P3 - Algebra 1997***
Sea $T : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ dado por:

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + (2a_1 + a_2)x + (2a_2 + a_3)x^2 + 2a_3x^3$$

a) Probar que T es una transformación lineal biyectiva

b) Si id es la transformación identidad del espacio $P_3(\mathbb{R})$ pruebe que $(T - 2id), (T - 2id)^2, (T - 2id)^3$ y $T - id$ son transformaciones lineales

c) Encontrar bases y dimensiones de $Ker(T - 2id), Ker(T - 2id)^2$ y $Ker(T - 2id)^3$

d) Probar que $P_3(\mathbb{R}) = Ker(T - 2id)^3 \bigoplus Ker(T - id)$

P9. ***C1 P2 - Lineal 2012-3***
Una matriz A con coeficientes reales se dice **positiva-definida** si es simétrica y $x^tAx > 0$ $\forall x \neq 0$. Pruebe que:

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ es positiva-definida

b) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es dada por $f(x) = x^tAx$ con A matriz simétrica. Entonces A es positiva-definida ssi:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}^n x \neq y, \lambda \in (0,1)$$

c) Si B es invertible y simétrica entonces B^2 es positiva-definida

P10. ***C6 P3 (ii), (iii) y (iv) - Algebra 1999***

a) Sea $L : \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal. Probar que existe una matriz $B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que para toda $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ se tiene:

$$L(A) = \sum_{i=1}^{n} (BA)_{ii}$$

b) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ una matriz simetrica tal que $x^t Ax \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Pruebe que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $\exists v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ que cumple $Av = \lambda v$ entonces $\lambda \geq 0$

c) Sea $T : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la transformación lineal definida por $T(M) = AM$, donde $A \in \mathcal{M}_{nn}$ es una matriz fija. Probar que T es isomorfismo ssi A es invertible.

P11. ***C2 P1- Lineal 2007-2***

a) Considere la transformación $T : P_2 \rightarrow P_4$ $T[p](x) = (x^2 + x + 1)p(x)$

1) Demuestre que T es lineal
2) Encuentre una base y la dimensión de $Ker(T)$
3) Determina una base de $Im(T)$ y calcule el rango de T
4) Estude inyectividad y epiyectividad de T. Estudie además si T es isomorfismo

b) Sean V, W ev sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ Dada una transformación lineal $L : V \rightarrow W$ se define su grafo como $Grf(L) = \{(v, L(v)) \in V \times W : v \in V\}$

1) Pruebe que $Grf(L)$ es un sev de $V \times W$
2) Pruebe que V y $Grf(L)$ son isomorfos