MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 11 - Transformaciones lineales

P1. ***C6 P1 - Algebra 1998***
Sea $T : M_{2,2} \to \mathbb{R}^4$ definida por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b, b-c, c-d, d-a)$$

a) Pruebe que T es lineal

b) Calcule una base y la dimensión para los sev $Ker(T)$ e $Im(T)$

c) Estudie la inyectividad y sobreyectividad de T

d) Considere las bases respectivas de $M_{22}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^4$ dadas por:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } C = \{(1,0,0,0),(1,-1,0,0),(1,-1,-1,0),(1,-1,0,-1)\}$$

Calcule la matriz representante de T con respecto a las bases B y C

P2. ***C5 P1 - Algebra 2002***

a) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una función lineal que satisface:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\ T\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) Encuentre la transformiación T y su matriz representante
2) Encuentre la base del $Ker(T)$
3) Encuentre una base de $Im(T)$

b) Sea V un ev de dimensión finita sobre $\mathbb{R}$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T \circ T = T$. Demuestre que $V = Ker(T) \bigoplus Im(T)$

P3. ***C5 P2 (b) y (c) - Algebra 2006***

a) Sea U un espacio vectorial de dimensión finita y $T : U \to U$ una transformación lineal. Demuestre que:

1) $T \circ T = 0 \iff Im(T) \subseteq Ker(T)$
2) $Im(T) = Ker(T) \iff dim(U) = 2dim(Ker(T))$ y $Im(T) \subseteq Ker(T)$

b) Encontrar todas las transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que $Ker(T) = \langle\{(0,1)^t\}\rangle$ y $Ker(T) = Im(T)$

P4. ***C6 P2 - Algebra 1997***
Sea $MS_{2,2}$ es el sev de la matrices simetricas de $2,2$. Se define $T : MS_{2,2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ como:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}[x] = c + (b+a)x + 2ax^2$$

Considere además las bases $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\beta' = \{1, x, x^2\}$

a) Demuestre que T es lineal.

b) ¿T puede ser epiyectiva? ¿T puede ser inyectiva?

c) Calcular la matriz A con respecto a las bases β y β'

d) Encuentre $S : MS_{2,2}(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ cuya matriz representante con respecto alas bases β y β' es A^T

P5. ***C2 P1- Lineal 2009-2***
Sea V un ev con base $B = \{u, v, w\}$ y sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que:

$$T(u) = v - w \; T(v) = u + v \; T(w) = u + 2v - w$$

a) Determine la matriz representante de T con respecto a las bases B y B

b) Sea L esl sev de V generado por $2u + 3v - w$. Encuentre los siguientes sev y sus dimensiones:

1) $T(L)$
2) $L \cap Ker(T)$
3) $L + Ker(T)$
4) $Im(T)$

P6. ***C5 P3 (a) - Algebra 2005***
Sean V, W ev reales y $T : V \to W$ una función lineal. Sea $\{u_1, ..., u_k\} \subseteq V$ un conjunto li. Probar que $\{T(u_1), .., T(u_k)\}$ son li ssi $\langle\{u_1, .., u_n\}\rangle \cap Ker(T) = \{0\}$

P7. ***C6 P1 (a) y (b) - Algebra 1996***
Sea $L : P_3 \to P_3$ definida por $L[p](x) = p(0)x^3 + p(1)(x - 4)^2$

a) Pruebe que L es una transformación lineal

b) Calcule la matriz representante de L cuando en el espacio de partida y de llegada se usa la base canonica.

P8. ***C6 P2 (i) - Algebra 1998***
Sea $T : P_2 \to P_2$ definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + 2a_2) + a_1x + (2a_0 + a_2)x^2$

a) Demuestre que T es lineal

b) Encuentre su matriz representante

P9. ***C6 P1 (i) - Algebra 1999***
Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ deinida por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2, x_3 + x_1 - 3x_4, x_1 + x_2 + x_3)$

a) Demuestre que T es lineal

b) Calcule las bases del $Ker(T)$ e $Im(T)$

c) Es T inyectiva, sobreyectiva.

d) Calcule la matriz reperesentante con respecto a las bases de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

respectivamente

P10. ***C6 P3 (a) - Algebra 2005***
Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal

a) Verifique que $Im(T^2) \subseteq Im(T)$ y $Ker(T) \subseteq Ker(T^2)$ $(T^2 = T \circ T)$

b) Demuestre que $Im(T^2) = Im(T) \implies Ker(T^2) = Ker(T)$

Resumen

- **[Transformación lineal]** Sean U, V dos sev sobre el mismo cuerpo K $T : U \to V$ se dice transformación lineal si
  a) $\forall u_1, u_2 \in U : T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$
  b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in U$: $T(\lambda u) = \lambda T(u)$
- **[Obs:]** T es un morfismo de grupos
- **[Prop]** Sea $T : U \to V$ una transformación lineal
  a) $T(0) = 0$
  b) $T(-u) = -T(u)$
  c) $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(u_i)$
- **[Prop]** Sea $T : U \to V$ es lineal ssi
$$\forall \lambda \in Ł, \forall u_1, u_2 \in U : T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2)$$
- **[Isomorfismo]** $T : U \to V$ se dice isomorfismo entre U y V si es lineal y biyectivo. U y V se dicen ismorfos y se denotan $U \cong V$
- **[Teo]** Todos los espacios de dimensión finita son isomorfos entre si.
- **[Prop]** Composición de funciones lineales es lineal. Composición de isomorfismos es isomorfismo.
- **[Nucleo]** Para $T : U \to V$. Se define $Ker(T) = \{x \in U : T(x) = 0\}$
- **[Imagen]** Para $T : U \to V$. Se define $Im(T) = \{y \in V : \exists u \in U, T(u) = y\}$
- **[Prop]** El $Ker(T)$ e $Im(T)$ son sub espacios de sus respectivos espacios.
- **[Rango de una transformación]** El rango de una transformación es la dimensión de la imagen.
- **[Prop]** T lineal entonces T es inyectiva ssi $Ker(T) = \{0\}$
- **[Prop]** T lineal es isomorfismo ssi $Ker(T) = \{0\}$ y $Im(T) = V$ ssi $dim(Ker(T)) = 0$ y $dim(Im(T)) = dim(V)$
- **[Teorema Nucleo Imagen (TNI)]** $T : U \to V$, $dim(U), dim(V) < \infty$ entonces $dim(U) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$
- $T : U \to V$ lineal
  a) $dim(U) = dim(V)$:
$$T \text{ inyectiva } \iff T \text{ epiyectiva } \iff T \text{ biyectiva}$$
  b) $dim(U) > dim(V)$, T **no** puede ser intectiva
  c) $dim(U) < dim(V)$, T **no** puede ser epiyectiva
  d) U isomorfo a $V \iff dim(U) = dim(V)$
- Sea U, V sev sobre $\mathbb{K}$, de dimensiones $dim(U) = p$ y $dim(V) = q$ entonces $L_{\mathbb{K}}(U, V) := \{T : U \to V : T$ es transformación lineal $\}$ sev de las funciones sobre el cuerpo de $\mathbb{K}$
- **[Teo]** $L_K(U, V) \cong \mathcal{M}_{qp}(\mathbb{K})$
- **[Propr]** $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es invertible ssi $T(x) = Ax$ es isomorfismo