

Pacta aux 10

P1) Sea π_0 el plano que
pasa por el origen $O(0,0,0)$
y tiene vectores directores
 $(0,1,1)$ y $(1,0,2)$. La ecuación
normal de π_0 es $\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

mientras que la ecuación
cartesiana del plano π que
pasa por el punto $P(1,1,1)$

y no corta a π_0 es

$$2x + y - z = 2$$

a) verificar que no corta a π_0

sol) $\pi_0: \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$$\Rightarrow 2x + y - z = 0$$

Logo

$$\Pi_0: 2x + y - z = 0$$

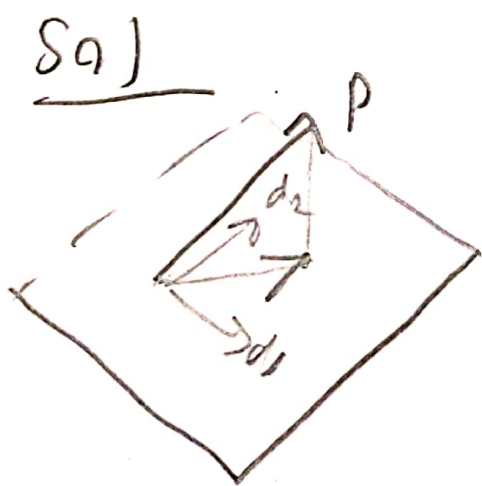
$$\Pi: 2x + y - z = 2$$

$$\text{Se } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi_0 \cap \Pi$$

$$\Rightarrow z = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Logo } \Pi_0 \cap \Pi = \emptyset$$

b) calcular a projeção de P sobre Π_0



$$r = P + \langle q - P, n \rangle \frac{n}{\|n\|^2}$$

• P : a projetar

• q : qualquer ponto em Π_0

• n vector normal.

luego

$$\Pi_0: 2x + y - z = 0$$

$$\Rightarrow n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

así tomando $q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{4+1+1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

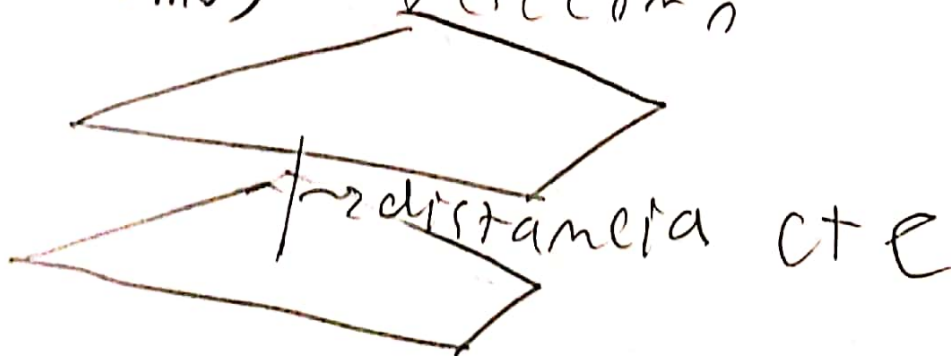
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \cdot [2 + 1 - 1] \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

c) calcular la distancia entre π y π_0 .

Como son paralelos los podemos ver como



luego

$$d(\pi, \pi_0) = d(P, \pi_0) \quad \text{con } P \in \pi \quad \text{cualquier punto}$$
$$= d(P, \pi) \quad \text{con } \pi \text{ proyección de } P$$

la igualdad se tiene

porque la proyección minimiza la distancia

luego hasta calcular

$$d\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \right\|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}}$$

$$= \frac{\sqrt{4+1+1}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow d(\pi, \pi_0) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

P₂ | Considere el plano

π de ecuación $x + y - z = 0$

y la recta L de vector director

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que pasa por el origen.

Se define el punto simétrico de P con respecto al plano π como aquel punto del espacio que se encuentra sobre la recta perpendicular al plano π y que pasa por P , y que está a la misma distancia del plano que P pero en dirección contraria.

a) considere

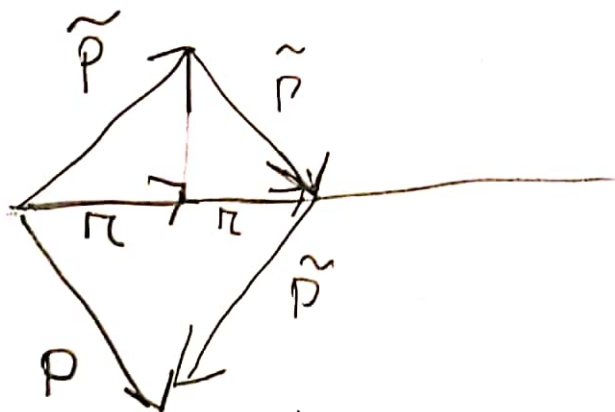
$$L' = \{ p \in \mathbb{R}^3 : p \text{ es el simétrico de algún punto en } L \}$$

Pruebe que L' es una recta y de la ecuación de dicha recta

Sal

notamos que $L = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

luego notar:



$$\text{luego } \vec{p} = 2\vec{n} - \vec{\tilde{p}}$$

$$\tilde{p} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

luego calculamos π

$$\pi = \tilde{p} + \frac{\langle q - \tilde{p}, m \rangle}{\|m\|^2} m$$

- $\tilde{p}$: el vector a proyectar
- q : Un vector del plano
- m : vector normal

$$q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Pi$$

$$m = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{de la ecuaci3n cartesiana}$$

$$\pi = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}{\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2\lambda + \lambda}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{p} = 2 \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L' = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$\therefore$ es una recta.

b) calcular la ecuación del plano π' perpendicular al plano π que contiene a la recta L (Obs: los planos son perpendiculares si sus vectores son ortogonales)

Sol

Queremos $L \subseteq \pi'$ y π' perpendicular a π . luego considerar como vectores directores del plano π' a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ es algo intuitivo

com si deducimos

$$\pi^{-1}: \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{si } \beta = 0 \Rightarrow L \subseteq \pi^{-1}$$

$$\text{y veamos si } \tilde{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

cumple ser ortogonal a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\tilde{m} = \begin{vmatrix} \lambda & \beta & \kappa \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \kappa \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda + 2\beta + \kappa$$

$$\Rightarrow \tilde{m} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \tilde{m}, m \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= -1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \pi'$ cumple lo pedido //

$$c) L' \subseteq \pi'$$

notamos que

$$L': \tilde{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{veamos que}$$

$$\text{para } \tilde{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \exists \lambda, \beta \in \mathbb{Q}$$

$$\tilde{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{\lambda} \\ 2\tilde{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$$

$$0 = 2\lambda + \beta \quad (1)$$

$$-\tilde{\lambda} = \lambda + \beta \quad (2)$$

$$2\tilde{\lambda} = -\beta \quad (3)$$

$$\rightarrow \beta = -2\tilde{\lambda} \quad (3)$$

$$\rightarrow 0 = 2\lambda - 2\tilde{\lambda} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \lambda = \tilde{\lambda}$$

luego vemos que es compatible

$$0 = 2\hat{\lambda} - 2\tilde{\lambda}$$

$$-\hat{\lambda} = \tilde{\lambda} - 2\tilde{\lambda}$$

$$2\hat{\lambda} = -[-2\tilde{\lambda}]$$

$$\Rightarrow \hat{\lambda} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2\tilde{\lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{\lambda} \\ 2\hat{\lambda} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L \in \pi^1$$

The Pain you feel
Today will be the strength
you feel tomorrow



P3]

Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sea una acotada
si $\exists C > 0$ t. q $\|T(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \forall x \in \mathbb{R}^n$
muestre que

T lineal y acotada ssi $T(x) = 0 \forall x$

Sol]

$\Rightarrow$ $T(\lambda x + t y) = 0$

$$\lambda T(x) + t T(y) = 0$$

$\therefore T$ es lineal y es acotada //

$\Rightarrow$

sea $C > 0$ una acotada t. q

$$\|T(x)\|_{\mathbb{R}^m} \leq C \forall x \in \mathbb{R}^n$$

supongamos que $\exists x \in \mathbb{R}^n$

$$T(x) \neq 0$$

$\Rightarrow$ consideramos

$$\tilde{x} = \frac{(c+1)x}{\|T(x)\|_{R_m}}$$

$$\Rightarrow \|T\left(\frac{(c+1)x}{\|T(x)\|_{R_m}}\right)\|_{R_m} \leq c$$

↓ Positividad n.º
Homogeneidad $T(\cdot)$

$$\Rightarrow \frac{(c+1)}{\|T(x)\|_{R_m}} \|T(x)\|_{R_m} \leq c$$

$$\Rightarrow c+1 \leq c$$

$$\Rightarrow 1 \leq 0 \quad \text{---} \Rightarrow \text{---}$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad T(x) = 0$$

P4] $\text{seal} : M_{3,3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

la función que realiza

$$T(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

a) Pruebe que T es lineal
y calcule las dimensiones
del conjunto imagen de T
y núcleo de T

Sol

$$T(\lambda A + B) = [\lambda A + B]_{11} + [\lambda A + B]_{22} + [\lambda A + B]_{33}$$

$$= \lambda A_{11} + B_{11} + \lambda A_{22} + B_{22} + \lambda A_{33} + B_{33}$$

$$= \lambda [A_{11} + A_{22} + A_{33}] + B_{11} + B_{22} + B_{33}$$

$$= \lambda T(A) + B$$

Calculamos el conjunto
imagen de T

$$\gamma \in \mathbb{R} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es t.q.}$$

$$T(A) = \gamma$$

$\Rightarrow T$ es epyectiva

$$\therefore T(M_{3,3}(\mathbb{R})) = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Im}(T)) = 1 \quad \begin{matrix} \mathbb{R} \text{ tiene} \\ \searrow \text{dimensión} \\ 1 \end{matrix}$$

ahora por TNI

$$\dim(M_{3,3}) = \dim(\text{Im}(T)) + \dim(\text{Ker}(T))$$

$$\Rightarrow q = 1 + \dim(\text{Ker}(T))$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(T)) = 8$$

b) Encuentre bases de

$\text{Im}(T)$, $\text{Ker}(T)$. Es T inyectiva,
es epyectiva, justifique.

Sol

$$\text{Como } \text{Im}(T) = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \{a\} \text{ es base } \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ahora

$$A \in \text{Ker}(T) \text{ ssi } T(A) = 0$$

$$\text{ssi } A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0$$

$$\text{ssi } A_{11} = -A_{22} - A_{33}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -A_{22}-A_{33}A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$= A_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{21} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ A_{13} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{31} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ A_{23} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{32} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ A_{22} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + A_{33} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

luego son un generador de 8
vectores de un espacio de
dimensión 8 luego son

base.

T no es inyectiva

ya que $\ker T \neq \{0\}$

T si es suryectiva por

$$\text{Im } T = \mathbb{R}$$

P5] sea $T: P_5(\mathbb{R}) \rightarrow P_{10}(\mathbb{R})$

dato $P \mapsto (T(P))(x) = P(x^2)$

a) pruebe que T es lineal

Sol

$$T(\lambda P + g)(x) = [(\lambda P + g)](x^2)$$

$$= \lambda P(x^2) + g(x^2)$$

$$= \lambda T(P)(x) + T(g)(x)$$

$$\Rightarrow T(\lambda P + g) = \lambda T(P) + T(g) //$$

b) Encuentre una base de $\text{Im}(T)$

Sea $P \in P_5(\mathbb{R})$, $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$

$$\Rightarrow T(P)(x) = P(x^2) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6 + a_4x^8 + a_5x^{10}$$

$\Rightarrow \{1, x^2, x^4, x^6, x^8, x^{10}\}$ generan

las imágenes de T y son
subconjuntos de una base

canónica $\Rightarrow$ son li

neares son base de la imagen

c) Pruebe que T es inyectiva

$$\dim(P_S) = \dim(\text{Im } T) + \dim(\text{Ker } T)$$

$\downarrow$
 $T_m i$ / encontramos
base

$$6 = 6 + \dim(\text{Ker } T)$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker } T) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Ker } T = \{0\}$$

$$\Rightarrow T \text{ es inyectiva}$$