MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 10 - Geometría y Principios de Linealidad

P1. ***C5 P1 - Algebra 1996***
Sea Π_0 el plano que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y tiene vectores directores $(0,1,1)$ y $(1,0,2)$. La ecuación normal de Π_0 es $\langle (x,y,z)^t, (2,1,-1)^t \rangle = 0$. Mientras que la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por el punto $P(1,1,1)$ y no corta a Π_0 es $2x+y-z=2$

a) Verificar que no corta a Π_0
b) Calcular la proyección de P sobre Π_0
c) Calcular la distancia entre Π y Π_0

P2. ***C5 P1 - Algebra 1998***
Considere el plano π de ecuación $x+y-z=0$ y la recta L de vector director $(2,1,0)^t$ que pasa por el origen. Se define el punto simetrico del punto P con respecto al plano π como aquel punto del espacio que se encuentra sobre la recta perpendicular al plano Π y que pasa por P, y que esta a la misma distancia del plano que P pero en dirección contraria.

a) Considere $L' = \{P \in \mathbb{R}^3 | P$ es el simetrico respecto de π de algún punto en $L\}$. Pruebe que L' es una recta y dé la ecuación de dicha recta.
b) Calcular la ecuación del plano π' perpendicular al plano π que contiene a la recta L (Obs: dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales)
c) Probar que $L' \subseteq \pi'$

P3. Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ denotamos por $||\cdot||_{\mathbb{R}^m}$ a la norma de $\mathbb{R}^m$. Diremos que T es acotada si $\exists c > 0$ tal que $||T(x)||_{\mathbb{R}^m} \leq c$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ demuestre que:

$$T(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \iff \text{T es lineal y acotada}$$

P4. ***C5 P3 - Algebra 1996***

Sea $T : \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la función que realiza $T(A) = A_{11} + A_{22} + A_{33}$

a) Pruebe que T es lineal y calcule las dimensiones del conjunto imagen de T y el nucleo de T
b) Encunetre bases de $Im(T)$, $Ker(T)$. Es T inyectiva, es epiyectiva, justifique.

P5. ***C5 P3 - Algebra 2000***
Sea $T : P_5(\mathbb{R}) \to P_{10}(\mathbb{R})$ dado por: $(T(p))(x) = p(x^2)$

a) Pruebe que T es lineal
b) Encunetre una base de $Im(T)$
c) Pruebe que T es inyectiva

P6. **[Desafio 1]** Sea $p < n$ y sean $\{f_i\}_{i=1}^p$ funciones lineales tal que $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\ \forall i$. Muestre que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{p} Ker(f_i) \neq \{0\}$.

P7. **[Desafio 2]** Sea $L(V,U) = \{T : V \to U |\ T$ es una transformación lineal$\}$. Si $dim(V) = n$ y $dim(U) = m$ entonces demuestre que $L(V)$ es un sev del espacio de las funciones y que $dim(L(V,U)) = nm$

P8. **[Desafio 3]** Sea V un ev tal que $dim(V) = n$ muestre que: $\forall T \in L(V,V), \exists p \in P_{n^2}$ tal que $(p \circ T)(x) = 0\ \forall x \in V$

Estas ultimas tres preguntas tendran las mismas condiciones que la vez pasada. Si reciben preguntas en el foro subire la solución c:

Resumen

- **[Proyección ortogonal sobre un plano]** Llamamos protección ortogonal del punto $q \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ al punto $r \in \Pi$ tal que $q - r$ perpendicular a Π. Es más r esta dado por:

$$r = q + \langle p - q, n \rangle \frac{n}{||n||^2}$$

  Donde p es un punto del plano y n vector normal de Π

- **[Transformación lineal]** Sean U, V dos sev sobre el mismo cuerpo K $T : U \to V$ se dice transformación lineal si
  a) $\forall u_1, u_2 \in U : T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$
  b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in U$: $T(\lambda u) = \lambda T(u)$
- **[Obs:]** T es un morfismo de grupos
- **[Prop]** Sea $T : U \to V$ una transformación lineal
  a) $T(0) = 0$
  b) $T(-u) = -T(u)$
  c) $T(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i T(u_i)$
- **[Prop]** Sea $T : U \to V$ es lineal ssi

$$\forall \lambda \in Ł, \forall u_1, u_2 \in U : T(\lambda u_1 + u_2) = \lambda T(u_1) + T(u_2)$$

- **[Isomorfismo]** $T : U \to V$ se dice isomorfismo entre U y V si es lineal y biyectivo. U y V se dicen ismorfos y se denotan $U \cong V$
- **[Teo]** Todos los espacios de dimensión finita son isomorfos entre si.
- **[Prop]** Composición de funciones lineales es lineal. Composición de isomorfismos es isomorfismo.
- **[Nucleo]** Para $T : U \to V$. Se define $Ker(T) = \{x \in U : T(x) = 0\}$
- **[Imagen]** Para $T : U \to V$. Se define $Im(T) = \{y \in V : \exists u \in U, T(u) = y\}$
- **[Prop]** El $Ker(T)$ e $Im(T)$ son sub espacios de sus respectivos espacios.
- **[Rango de una transformación]** El rango de una transformación es la dimensión de la imagen.
- **[Prop]** T lineal entonces T es inyectiva ssi $Ker(T) = \{0\}$
- **[Prop]** T lineal es isomorfismo ssi $Ker(T) = \{0\}$ y $Im(T) = V$ ssi $dim(Ker(T)) = 0$ y $dim(Im(T)) = dim(V)$
- **[Teorema Nucleo Imagen (TNI)]** $T : U \to V$, $dim(U), dim(V) < \infty$ entonces $dim(U) = dim(Ker(T)) + dim(Im(T))$
- $T : U \to V$ lineal
  a) $dim(U) = dim(V)$:

$$T \text{ inyectiva } \iff T \text{ epiyectiva } \iff T \text{ biyectiva}$$

  b) $dim(U) > dim(V)$, T **no** puede ser intectiva
  c) $dim(U) < dim(V)$, T **no** puede ser epiyectiva
  d) U isomorfo a $V \iff dim(U) = dim(V)$
- **[Matriz Representante]**: Sea $T : V \to U$ una función lineal. Sea $dim(V) = n$ y $dim(U) = m$ Luego existe una matriz $M_T \in \mathcal{M}_{mn}$ tal que $T(x) = M_T \cdot x$