

Prueba Aux 9

P1) calcule $\max\{v^T x : v \in \mathbb{R}^n \text{ y } \|v\|=1\}$

sol

$$v^T x \stackrel{\text{prop}}{=} \langle v, x \rangle$$

$$= \|v\| \cdot \|x\| \cos(\theta)$$

con θ el ángulo entre v y x

luego para que en maximizar

$$v \in \mathbb{R}^n \text{ t. q. } \|v\|=1$$

$$\Rightarrow v^T x = \|x\| \cos(\theta)$$

$$\cos(\theta) \in [-1, 1], \quad x \text{ es fijo}$$

$\therefore$ Para $\theta=0$ se alcanza

el valor más grande

es de $\|x\|$

$$\langle v, x \rangle = \|x\| \cdot 1 = \|x\| \cdot \|v\|$$

luego tenemos la igualdad
dada por C-S

Recordar C-S

$$|\langle v, x \rangle| \leq \|x\| \cdot \|v\|$$

luego v y x son

Paralelos

$$\Rightarrow v = \lambda x \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\|v\| = \|\lambda x\|$$

$$\|1\|$$

$$\Rightarrow \|\lambda x\| = 1$$

$$\Rightarrow |\lambda| \cdot \|x\| = 1 \Rightarrow |\lambda| = \frac{1}{\|x\|}$$

ahora $\langle v, x \rangle \equiv 1$ y $\cos(\theta) = 1$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\|x\|}$ por $\cos(\theta)$ positivo

luego

$\langle \frac{x}{\|x\|}, x \rangle$ es el valor buscado

$= \frac{\langle x, x \rangle}{\|x\|}$ / prop $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$= \frac{\|x\|^2}{\|x\|}$ / def $\|\cdot\|$

$= \|x\|$

$\therefore$ el máximo es $\|x\|$

P2 Sea $v \in \mathbb{R}^n$ y sea $v \neq 0$ un vector paralelo, unitario (de norma 1), al dado

Sal

este proceso se llama normalizar
usualmente se denota $\hat{v}$ al
normalizado de v y
este se obtiene por

$$\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} \quad \left[\|\hat{v}\| = \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{\|v\|}{\|v\|} = 1 \right]$$

P₃] $x, y \in \mathbb{R}^2$ ¿y cuando sea posible
 encuentre la matriz de
 rotación $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
 y $\lambda \in \mathbb{R}$ t. q $y = \lambda R(\theta)x$

Sol

Primero notan que si $\|y\|=1, \|x\|=1$

$$\Rightarrow \|y\| = \|\lambda R(\theta)x\|$$

$$\Rightarrow 1 = |\lambda| \cdot \|R(\theta)x\|$$

$$R(\theta) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\theta) + b \sin(\theta) \\ b \cos(\theta) - a \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\|R(\theta) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\|^2 = [a \cos(\theta) + b \sin(\theta)]^2 + [b \cos(\theta) - a \sin(\theta)]^2$$

$$= a^2 \cos^2(\theta) + 2ab \cos(\theta) \sin(\theta) + b^2 \sin^2(\theta)$$

$$+ b^2 \cos^2(\theta) - 2ab \cos(\theta) \sin(\theta) + a^2 \sin^2(\theta)$$

$$= a^2 [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] + b^2 [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)]$$

$$= a^2 + b^2 = \|x\|^2 = 1$$

$$\Rightarrow \|R(\theta)x\| = 1$$

$$\Rightarrow | \lambda | = 1$$

iv e g o motamos que em
geral

$$y = \lambda R(\theta)x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\|y\|} = \lambda \frac{R(\theta) \cdot x}{\|x\|} \cdot \frac{\|x\|}{\|y\|}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{\|y\|} = \frac{\lambda}{\|y\|} \cdot \|x\| \cdot \frac{R(\theta) \cdot x}{\|x\|}$$

$$\Rightarrow \left\| \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 = |\lambda|^2 \cdot \frac{\|x\|^2}{\|y\|^2} \cdot \left\| R(\theta) \cdot \frac{x}{\|x\|} \right\|^2$$

$$\Rightarrow |\lambda| = \frac{\|y\|}{\|x\|}$$

luego a esta dado

salvo por su signo

busquemos el θ t.q

$\hat{y} = R(\theta) \cdot \hat{x}$ para vectores unitarios, de existir

tomamos $\lambda = \frac{\|y\|}{\|x\|}$ y

concluimos

$$\text{sea } y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad y^1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$y \quad c^2 + d^2 = 1, \quad a^2 + b^2 = 1$$

$$[\|y\|=1, \quad \|y^1\|=1]$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\theta) + b \sin(\theta) \\ -a \sin(\theta) + b \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c = a \cos(\theta) + b \sin(\theta)$$

$$d = -a \sin(\theta) + b \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow ac = a^2 \cos(\theta) + ab \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow bd = -ab \sin(\theta) + b^2 \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow ac + bd = [a^2 + b^2] \cdot \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow ac + bd = \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \langle x, y \rangle = \cos(\theta)$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot \cos(\theta)$$

$$= \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\theta)$$

Proof of no 1 a d o

$$b \cdot c = ba \cos(\theta) + b^2 \sin(\theta)$$

$$-ad = a^2 \sin(\theta) - ab \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow bc - ad = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin(\theta)$$

$$\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = \sin(\theta)$$

ahora en el caso general

Si tomamos $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\hat{x} = \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \hat{y} = \frac{1}{\|y\|} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a/\|x\| \\ b/\|x\| \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} c/\|y\| \\ d/\|y\| \end{pmatrix}$$

en las ecuaciones tenemos

$$\cos(\theta) = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$$

$$= \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle$$

$$= \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$\sin(\theta) = \frac{b}{\|x\|} \cdot \frac{c}{\|y\|} - \frac{a}{\|x\|} \cdot \frac{d}{\|y\|}$$

$$= \frac{bc - ad}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \right\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

notamos que ambas igualdades
están en términos de $\sin$ y $\cos$

$$\text{por lo que } \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1, 1]$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\| = \|x\|$$

$$\left\| \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right\| = \|y\|$$

$$\text{luego } \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \right\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \in [-1, 1]$$

así como $\cos(\theta) = \alpha$ tiene
 2 soluciones y $\sin(\theta) = \beta$
 tiene 2 soluciones solo
 puede haber 1 solución
 compatible con ambos
 sistemas, así existen
 θ dado por esas ecuaciones
 o no existe. Para ver la
 compatibilidad basta ver
 $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

y comes to tend to 1 as

$$1 = \frac{\|y\|}{\|x\|} \quad [\text{el signo lo absorbe el } \theta]$$

$$\theta \neq 0 \quad \cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

$$\sin(\theta) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d \\ c \end{pmatrix} \right\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}$$

entonces

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2} \left[[ac + bd]^2 + [bc - ad]^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\|x\|^2 \|y\|^2} \left[(ac)^2 + 2acbd + (bd)^2 + (bc)^2 - 2cbad + (ad)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{[a^2+b^2][c^2+d^2]} \cdot [a^2c^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2d^2]$$

$$= \frac{1}{[a^2+b^2][c^2+d^2]} [(a^2+b^2)c^2 + (a^2+b^2)d^2]$$

$$= \frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$= 1$$

∴ Simple way solution ⚡

P4) sea $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ muestre que

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, c \rangle = 0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y

que $\dim(V) = n-1$. Interprete geométricamente el resultado

So)

• $V \neq \emptyset$

$$x=0 \text{ est. q. } \langle x, c \rangle = 0$$

$$\Rightarrow 0 \in V \Rightarrow V \neq \emptyset$$

• $x, y \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ p.d. $\lambda x + y \in V$

$$\langle \lambda x + y, c \rangle = \langle \lambda x, c \rangle + \langle y, c \rangle^0$$

$$= \lambda \langle x, c \rangle^0$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lambda x + y \in V //$$

Para la dimensión

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot c_1 + x_2 \cdot c_2 + \dots + x_n \cdot c_n = 0$$

Como $c \neq 0 \exists c_i \neq 0$

Por simplicidad supondremos
[2 simetría]

que $c_1 \neq 0$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{c_2}{c_1} x_2 + \dots - \frac{c_n}{c_1} x_n$$

vega $x \in V$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{c_2}{c_1} x_2 + \dots - \frac{c_n}{c_1} x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_2 \begin{pmatrix} -c_2/c_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -c_3/c_1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \dots + x_m \begin{pmatrix} -c_m/c_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

∴ hay que ver que

$$\left\{ \begin{pmatrix} -c_2/c_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -c_m/c_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son li ya que demerem

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -c_2/c_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \alpha_{m-1} \begin{pmatrix} -c_m/c_1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-c_2/c_1 \cdot \alpha_1 + \dots - \alpha_{m-1} \cdot c_m/c_1 = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= 0 \\ \vdots \\ \alpha_m &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0$$

$$\Rightarrow \text{son } l_i$$

$$\Rightarrow \dim(V) = n-1 //$$

la interpretación

es que para

$n=2$ es una recta

$n=3$ un plano

$\therefore$ es una especie

de generalización del plano.

P5]

Sea Π_0 el plano que
pasa por el origen
y tiene vectores
directores $(0,1,1)$ y $(1,0,2)$

a) Escriba la ecuación
normal del plano Π_0

Sol]

$$P = (0,0,0) \in \Pi_0$$

$$\text{y } d_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ son}$$

sus vectores directores
luego

$$n = d_1 \times d_2 \text{ est. y}$$

$$\langle X - P, n \rangle = 0 \text{ es la ecuación}$$

normal.

$$n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} k$$

$$= [1 \cdot 2 - 0 \cdot 1]i - [0 \cdot 2 - 1 \cdot 1]j + [0 \cdot 0 - 1 \cdot 1]k$$

$$= 2i + j - k$$

$$\Rightarrow n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{así } \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

es la ecuación
normal.

b) encontrar la ecuación
cartesiana del plano π
que pasa por el punto
 $P=(1,1,1)$ y no corta π_0

sol

como son planos que
no se cortan es de
ser paralelos, luego
es lo mismo que decir
que sus vectores normales
sean proporcional, tomamos n
así

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

esto nos dice

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$2x + y - z = [2 + 1 - 1] = 0$$

$$2x + y - z - 2 = 0$$

$2x + y - z = 2$ es la
la ecuación pedida.

c) Calcular la proyección
de P sobre Π_0

Sol

sea π la proyección luego

$$\pi = P + \langle S - P, n \rangle \frac{n}{\|n\|^2}$$

donde P el proyectado, S un punto del plano y n normal

luego sea $S = 0 \in \Pi$.

$$\Rightarrow \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2$$

$$= 4 + 1 + 1$$

$$= 6$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\angle \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

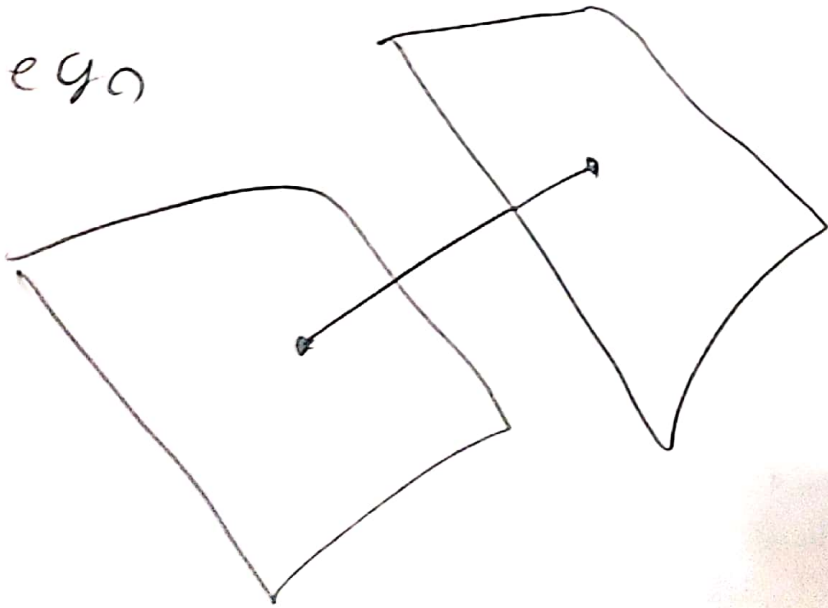
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - 2/3 \\ 1 - 1/3 \\ 1 + 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

d) Calcular la distancia entre π y π_0

So)

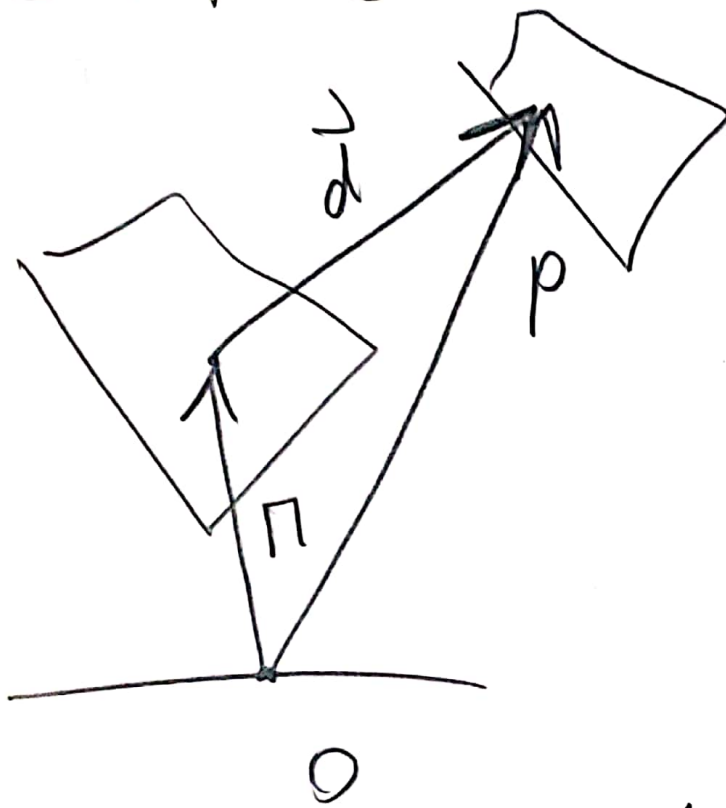
Como los dos planos son paralelos su distancia es la entre puntos respectivos
luego



notamos que $P \in \pi$

y P' es la proyección
de P sobre π_0

luego $\vec{p\Pi}$ vector Π me
 dice la distancia
 entre los planos



$$\vec{d} = p - \Pi = \vec{p\Pi}$$

$$\text{luego } p - \Pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|p - \Pi\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{4+1+1} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

así $d(\pi, \pi_0) = d(P, \pi) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

P6 Sean P, Q distintos
demuestre que

$A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - P\| = \|x - Q\| \}$ es
un plano. Encuentre un punto
 $P \in \pi$ perteneciente a A y encuentre
un vector normal al plano

Sol

$$\|x - P\| = \|x - Q\| \quad \text{ssi} \quad \|x - P\|^2 = \|x - Q\|^2$$

↓

por positividad

$$ssi \quad \langle x-p, x-p \rangle = \langle x-q, x-q \rangle \text{ def}$$

$$ssi \quad \langle x-p, x \rangle - \langle x-p, p \rangle = \langle x-q, x-q \rangle$$

$$ssi \quad \langle x, x \rangle - \langle p, x \rangle - \langle x, p \rangle + \langle p, p \rangle = \langle x-q, x-q \rangle$$

$$ssi \quad \langle x, x \rangle - 2\langle x, p \rangle + \langle p, p \rangle = \langle x-q, x-q \rangle$$

$$ssi \quad \langle x, x \rangle - 2\langle x, p \rangle + \langle p, p \rangle \stackrel{\text{análogo}}{=} \langle x, x \rangle - 2\langle x, q \rangle + \langle q, q \rangle$$

$$ssi \quad 2\langle x, q \rangle - 2\langle x, p \rangle = \langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle$$

$$ssi \quad \langle x, q-p \rangle = \frac{\|q\|^2 - \|p\|^2}{2}$$

luego $m = q - p$ es un vector

normal asociado a

$\langle x, m \rangle = c$ que es un plano

para encontrar el punto

$$sabemos que \quad \langle q+p, q-p \rangle = \|q\|^2 - \|p\|^2$$

Y así $x = \frac{p+q}{2}$ sería un punto del plano. Verifiquemos.

$$\left\langle \frac{p+q}{2}, q-p \right\rangle = \frac{1}{2} [\langle p+q, q-p \rangle]$$

$$= \frac{1}{2} [\langle p+q, q \rangle - \langle p+q, p \rangle]$$

$$= \frac{1}{2} [\langle \cancel{p}, q \rangle + \langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle - \langle \cancel{q}, p \rangle]$$

$$= \frac{1}{2} [\langle q, q \rangle - \langle p, p \rangle] = \frac{\|q\|^2 - \|p\|^2}{2} //$$

P₇

$\pi: x + y - z = 0$; plano

L: recta con vector director

$(2, 1, 0)^T$ que pasa por el origen

Se define el punto simétrico

del punto P con respecto al plano

π como aquel punto del espacio que se encuentra

sobre la recta perpendicular

al plano π y que pasa por P, y

que está a la misma distancia

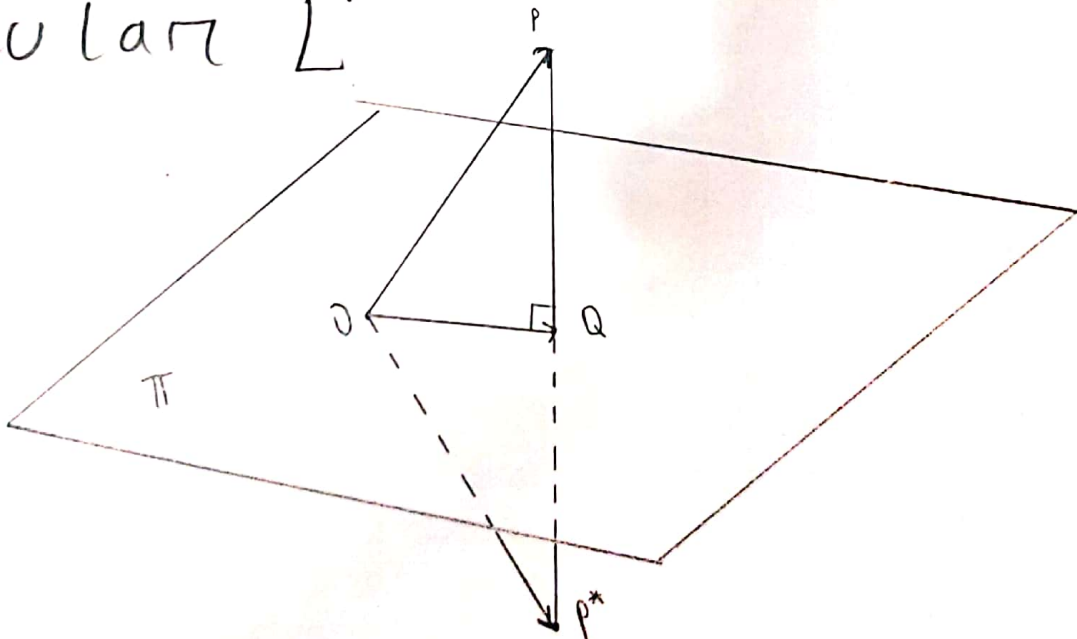
del plano que P pero en dirección contraria

a) Considere $L = \{P \in \mathbb{R}^3 : P \text{ es el simétrico respecto de } \pi \text{ de algún punto en } L\}$. Pruebe que L' es una recta y de la ecuación de dicha recta.

Sol

$$L = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

ahora una forma de calcular L'



luego queremos

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2 + 1 + 0 - 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore Q = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

em contran P^* calculemos

Q. Sabemos

$$Q = P + \langle S - P, m \rangle \frac{m}{\|m\|^2}$$

donde m es el normal

y S es del plano

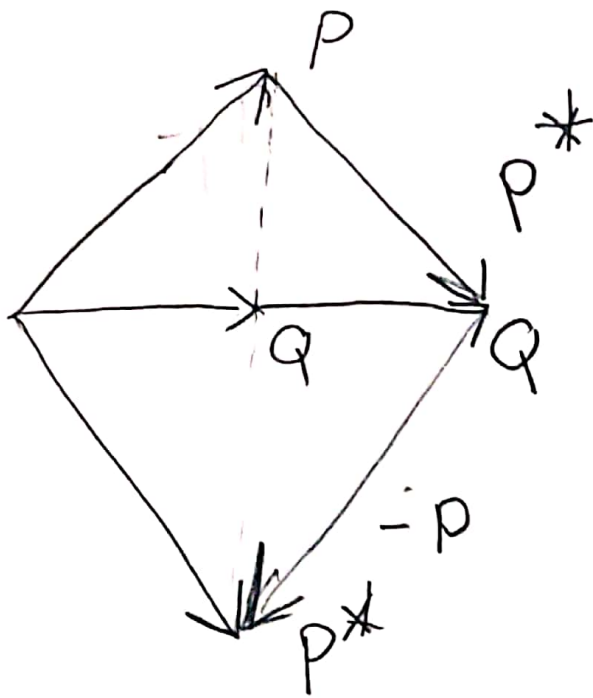
$$S = (0, 0, 0) \in \pi$$

∴

$$Q = P - \langle P, m \rangle \frac{m}{\|m\|^2}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|^2}$$

ahora notemos que



$$\begin{aligned}\therefore p^* &= 2Q - P \\ &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2\lambda \end{pmatrix} \\ &= 1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\therefore L'$ es una recta //

$$y \quad L' = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



b) calcular la ecuación del plano π' perpendicular al plano π que contiene a la recta L
 obs: dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogomales

Sol : habiamos calculado que el normal de π es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y adem\u00e1s pedimos } L \subseteq \pi$$

$$\text{luego tenemos } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y 0 \in L$$

$\therefore$ como $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ son no
paralelos

$$\pi' = 0 + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

y para observar que π y π' son
ortogonales.

calculamos

$$m' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} k$$

$$= [1 \cdot 0 - [1] \cdot [-1]] i - [1 \cdot 0 - [2] \cdot [-1]] j + [1 \cdot 1 - 1 \cdot 2] k$$

$$= i - 2j - k$$

$$\therefore m' = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

veamos si m, m' son ortogonales,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) \\ = 1 - 2 + 1 \\ = 0$$

$\therefore$ son perpendiculares. //

c) Probar que $L' \subseteq \pi'$

basta ver que $1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi'$

para eso com n^l es el normal de π

$$\pi^l: 1 \cdot x - 2 \cdot y - 1 \cdot z = D$$

$$x - 2y - z = D$$

com $D \in \mathbb{R}$ para determinar

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in L \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \pi^l$$

$$\Rightarrow 0 - 2 \cdot 0 - 0 = D$$

$$\Rightarrow D = 0$$

así

$$\pi^l: x - 2y - z = 0$$

así veamos que $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi^l$

$$0 - 2 \cdot [-1] - 2 = 2 - 2 = 0$$

$$\therefore \text{en efecto } \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \pi^l //$$

Pg]

Sea $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ el plano de ecuación
 $x+y+z=0$. Sea $P \notin \pi$, $P=(1,1,2)^T$
 $Q \in \pi$, $Q=(0,0,0)^T$. $d \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ y T, q
 $d=(a,b,c)^T$ $a+b+c=0$

a) Verifique que la recta L
que pasa por P y Q
tiene vector director d .
esta contenida en el plano

sol

$$L = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

luego vemos que

$$x \in L \Rightarrow x \in \pi$$

$$x \in L \Rightarrow x = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{pmatrix}$$

$$\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda(a+b+c) = \lambda \cdot 0 = 0$$
$$\Rightarrow x \in \pi \therefore L \subseteq \pi //$$

b) determine R la proyección ortogonal de R sobre Π

Sol

$$R = P + \frac{\langle q - P, n \rangle}{\|n\|^2} n \quad ; \quad n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \downarrow \text{ de ecuación}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 4/3 \\ 1 - 4/3 \\ 2 - 4/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} //$$

c) determini mesla proyección
de R sobre L

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-a/3 - b/3 + 2/3 c}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2c - a - b}{3(a^2 + b^2 + c^2)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

d) Muestre que el vector
 $p-s$ es ortogonal a d

Sal

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2c-a-b}{3(a^2+b^2+c^2)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ \left\langle -\frac{2c-a-b}{3(a^2+b^2+c^2)} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= a+b+2c - \frac{2c-a-b}{3(a^2+b^2+c^2)} \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= a+b+2c - \frac{2c-a-b}{3(a^2+b^2+c^2)} \cdot (a^2+b^2+c^2)$$

$$= a + b + 2c - \frac{[2c - a - b]}{3}$$

$$= \frac{3a + 3b + 6c - 2c + a + b}{3}$$

$$= \frac{4a + 4b + 4c}{3}$$

$$= \frac{4}{3} [a + b + c]^0$$

$$= \frac{4}{3} \cdot 0 = 0 //$$

e) si $d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

calcular la ecuación
cartesiana que pasa
por P, R, S

Sol

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{-1 - [-1]}{3(1^2 + (-1)^2 + 0^2)} = 0$$

$$\therefore S = 0, R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

así es un plano, por ser
puntos no paralelos

$$\tilde{\Pi}: Ax + By + Cz = D$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = s \in \Pi$$

$$\Rightarrow A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = D$$

$$\Rightarrow D = 0$$

$$\therefore \tilde{\Pi}: Ax + By + Cz = 0$$

$$n = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ nos da}$$

información de $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$

$$n = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} j$$

$$+ \begin{vmatrix} -1/3 & -1/3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} k$$

$$= \left[-\frac{1}{3} \cdot 2 - 1 \cdot \frac{2}{3} \right] i$$

$$- \left[-\frac{1}{3} \cdot 2 - 1 \cdot \frac{2}{3} \right] j$$

$$+ \left[-\frac{1}{3} \cdot 1 - \left[1, -\frac{1}{3} \right] \right] k$$

$$= -\frac{4}{3} i + \frac{4}{3} j + 0 k$$

$$\Rightarrow \hat{\pi} 1 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}y + 0z = 0 //$$