MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 9 - Más Geometría

P1. Sea $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ calcule $\max\{v^t x : v \in \mathbb{R}^n \text{ y } ||v|| = 1\}$

P2. Sea $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ encuentre un vector unitario (de norma uno) paralelo al dado.

P3. Sea $x, y \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ cuando sea posible encuentre la matriz de rotación $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $y = \lambda R(\theta) x$

P4. Sea $c \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ muestre que $V = \{x \in \mathbb{R}^n | \langle x, c \rangle = 0\}$ es un sev de $\mathbb{R}^n$ y que $dim(V) = n - 1$. Interprete geometricamente el resultado.
Obs: Si V es un sev de E se dice que V es hiperplano si $\exists e \in E \backslash V$ tal que $E = gen(e, V)$, donde $gen(e, V) = \{te + v : t \in \mathbb{R}, v \in V\}$. En particular si $dim(E) = n$ entonces $dim(V) = n - 1$.

Luego nostros mostramos que un tipo de hiperplano de $\mathbb{R}^n$ (o más generalmente de un espacio de dimensión finita) se puede escribir como $V = f_c^{-1}(\{0\})$ donde $f_c(x) = \langle x, c \rangle$. Luego la pregunta natural es si los hiperplanos estan caracterizados por funciones de ese tipo. Está pregunta la estudiaremos más adelante en otro auxiliar.

P5. ***C5 P1 - Algebra 1996***
Sea Π_0 el plano que pasa por el origen $O(0, 0, 0)$ y tiene vectores directores $(0, 1, 1)$ y $(1, 0, 2)$

a) Escriba la ecuación normal del plano Π_0

b) Encontrar la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y no corta a Π_0

c) Calcular la proyección de P sobre Π_0

d) Calcular la distancia entre Π y Π_0

P6. ***C4 P2 (a) - Algebra 2002***
Sean $P, Q \in \mathbb{R}^3$ puntos distintos, demuestre que $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : ||x - P|| = ||x - Q||\}$ es un plano. Encuentre un punto perteneciente a A y encuentre un vector normal al plano.

P7. ***C5 P1 - Algebra 1998***
Considere el plano π de ecuación $x + y - z = 0$ y la recta L de vector director $(2, 1, 0)^t$ que pasa por el origen. Se define el punto simetrico del punto P con respecto al plano π como aquel punto del espacio que se encuentra sobre la recta perpendicular al plano Π y que pasa por P, y que esta a la misma distancia del plano que P pero en dirección contraria.

a) Considere $L' = \{P \in \mathbb{R}^3 | P$ es el simetrico respecto de π de algún punto en $L\}$. Pruebe que L' es una recta y dé la ecuación de dicha recta.

b) Calcular la ecuación del plano π' perpendicular al plano π que contiene a la recta L (Obs: dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales)

c) Probar que $L' \subseteq \pi'$

P8. ***C1 P2 - Lineal 2015-2***
Sea $\pi \subseteq \mathbb{R}^3$ el plano de ecuación $x + y + z = 0$. Considere los vectores $P \notin \pi$, $P = (1, 1, 2)^t$ y $Q \in \pi$, $Q = (0, 0, 0)^t$ sea $d \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $d = (a, b, c)^t$ tal que $a + b + c = 0$

a) Verifique que la recta L que pasa por Q y tiene vector director d esta contenida en el plano.

b) Determine R la proyección ortogonalde P sobre π

c) Determine S la proyección de R sobre la recta L

d) Muestre que el vector $P - S$ es ortogonal a d

e) Si tomamos $d = (1, -1, 0)$ calcule la ecuación cartesiana que pasa por los puntos P, R, S

Resumen

- **[Producto punto]** Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y = y^t x$$

- **[Propiedades]**
  a) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
  b) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$
  c) $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$
  d) $\langle \lambda x, y\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
  e) $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$
- **[Norma Euclidiana]** Se define como $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$
- **[Prop]**
  a) $|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$
  b) $||x|| \geq 0$ y $||x|| = 0 \iff x = 0$
  c) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$
  d) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Desigualdad triangular)
  e) $|\langle x, y\rangle| = ||x|| \cdot ||y|| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, x = \lambda y$
- **[Distancia entre dos puntos]** Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$. La distancia entre p y q es el numero dado por $d(p, q) = ||q - p||$
- **[Perpendicularidad]** Dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ se dicen perpendiculares u ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$
- **[Angulo entre vectores]** Sean $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Definimos el angulo entre x e y como el numero $\theta \in [0, \pi]$ tal que:

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y\rangle}{||x|| \cdot ||y||}$$

- **[Notación]**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

- **[Producto cruz]** $x \times y =$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} k$$

- **[Prop]**
  a) $x \times y$ es perpendicular a x e y
  b) $x \times y = -y \times x$
  c) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
  d) $(\lambda x) \times y = x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$
  e) $x \times x = 0$
  f) $||x \times y|| = ||x|| \cdot ||y|| |\sin(\theta)|$
  g) Sea Π un plano con vectores directores d_1 y d_2 y que pasa por un punto p luego la ecuación:

$$Ax + By + Cz = D$$

  esta dada por $n = (A, B, C)^t$, $D = \langle p, n\rangle$ donde $n = d_1 \times d_2$ y se le llama vector normal.
- **[Ecuación normal]** Bajo la notación anterior si n es el vector normal de un plano y p un punto del plano se llama ecuación normal del plano a la ecuación dada por:

$$\langle x - p, n\rangle = 0$$

- **[Distancia Punto - Conjunto]** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sub conjunto no vacio y sea $q \in \mathbb{R}^n$ su distancia al conjunto A se define por $d(q, A) = \inf\{d(q, x) | x \in A\}$
- **[Proyección ortogonal sobre una recta]** Llamamos protección ortogonal del punto $q \in \mathbb{R}^n$ sobre la recta $L \subseteq \mathbb{R}^n$ al punto $r \in L$ tal que $q - r$ perpendicular a L. Es más r esta dado por:

$$r = p + \langle q - p, d\rangle \frac{d}{||d||^2}$$

  Donde p es el vector posición de L y d el vector director de L.
- **[Proyección ortogonal sobre un plano]** Llamamos protección ortogonal del punto $q \in \mathbb{R}^3$ sobre el plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ al punto $r \in \Pi$ tal que $q - r$ perpendicular a Π. Es más r esta dado por:

$$r = q + \langle p - q, n\rangle \frac{n}{||n||^2}$$

  Donde p es un punto del plano y n vector normal de Π
- **[Prop]** Si un plano esta dado por la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ entonces:

$$d(q, \Pi) = \frac{|Aq_1 + Bq_2 + Cq_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$