

MA1102-4 Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliar: Sebastián Bustos



Auxiliar 8 - Geometría

P1. C4 P2 (i) - Algebra 2002

En $\mathbb{R}^3$ considere las rectas:

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad L_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

- Encuentre las ecuaciones cartesianas de las rectas
- Demuestre que L_1 y L_2 se intersectan y encuentre la intersección

P2. Sea Π un plano en $\mathbb{R}^n$ muestre que Π es un sev ssi $0 \in \Pi$. **Obs:** Se define que V es un sub espacio vectorial afín de E si existe sub espacio vectorial W y $p \in E$ tal que $V = p + W$. Luego Π plano siempre es un sub espacio afín.

P3. Sean $\{\Pi_i\}_{i=1}^3$ planos de $\mathbb{R}^3$ muestre que siempre se tiene que la intersección de todos ellos es una de las siguientes opciones:

- No se intersectan
- Se intersectan en un único punto
- Se intersectan en una recta
- Son todos iguales

Concluya que para la intersección de $m \geq 3$ planos se mantiene el resultado.

P4. C5 P2 - Algebra 2003

- Sean $p, q, r \in \mathbb{R}^3$ tres puntos no colineales. Sea π el plano que contiene a los puntos p, q, r . Pruebe que:

$$x \in \pi \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ tales que } \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ y } x = \alpha p + \beta q + \gamma r$$

- Considere las rectas:

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \quad \wedge \quad L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

Pruebe que el plano que contiene a L_1 y L_2 tiene por ecuación cartesiana $x + y - z = 1$

P5. C4 P3 - Algebra 2004

- Verifique que las rectas

$$L_1 : \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad L_2 : \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

se intersectan en un único punto. Encuéntrelo

- Sea Π el plano con vectores directores $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $d_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y sea L la recta con vector director $d = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. donde $a, b \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores de los parámetro a, b tales que

- 1) L esté contenida en Π
- 2) L y Π no tengan puntos en común
- 3) $L \cap \Pi$ contenga exactamente un solo punto

P6. Extra: Aplicación (Con uso de herramientas de diferencial)

Se define el conjunto $\mathcal{C}^n([a, b]) = \{y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : y \text{ tenga derivadas hasta orden } n \text{ y son continuas en } [a, b]\}$. Demostrar que $\mathcal{C}^n([a, b])$ es un sev de las funciones.

Sean $\{a_i\}_{i=0}^{n-1} \subseteq \mathcal{C}^n([a, b])$ y $a_n(x) = 1$, se define el conjunto $\mathcal{H} = \{y \in \mathcal{C}^n([a, b]) : \sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(i)}(x) = 0 \forall x \in [a, b]\}$.

Demostrar que $\mathcal{H}$ es un sev de $\mathcal{C}^n([a, b])$. Con herramientas que escapan del curso se puede probar que $\dim(\mathcal{H}) = n$.

Ahora, además sea $Q \subseteq \mathcal{C}^n([a, b])$ se define $S = \{y \in \mathcal{C}^n([a, b]) : \sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(i)}(x) = Q(x) \forall x \in [a, b]\}$. Pruebe que $\forall y_p \in S$ se tiene que $S = y_p + \mathcal{H}$.

Concluya que $\forall y \in S \exists \{y_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{H}$ li tal que $\forall y_p \in S, \exists \{C_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ tal que $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_p$

Notar que si $n = 2$: S y $\mathcal{H}$ son rectas Y para $n = 3$: S y $\mathcal{H}$ son planos.

Conclusiones de lo mostrado: Las “ecuaciones” que trabajó se llaman ecuaciones diferenciales. Uno se pregunta con frecuencia que funciones cumplen cierta condición con sus derivadas [son problemas recurrentes en el area de la fisica; y por ende en la ingeniería]. Ahora lo que se probó es que una solución de una ecuación diferencial es una combinación lineal de n soluciones más una solución cualquiera. Luego el problema de resolver estas ecuaciones se reduce a buscar $n + 1$ funciones. En el curso de ecuaciones diferenciales verán herramientas para calcular estas ecuaciones.

Ejercicio: Con lo hecho demostrar que las funciones que cumplen $f'(x) = f(x), \forall x$ son de la forma $f(x) = Ce^x$ con $C \in \mathbb{R}$

Resumen

- **[Recta]:** Sea $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vector y $p \in \mathbb{R}^n$ un punto dado. La recta L que pasa por p y va en la dirección de d es el siguiente sub conjunto:

$$L = L_{p,d} = \{v \in \mathbb{R}^n : v = p + td, t \in \mathbb{R}\}$$

Se dice que p es una posición de L y que d es un vector director de L .

- **[Obs:]** A la ecuación $v = p + \lambda d, \lambda \in \mathbb{R}$ se le llama ecuación vectorial de la recta L .
- **[Prop]:** Dado $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ fijo se tendrá que:

$$q \in L_{p,d} \iff L_{p,d} = L_{q,d}$$

- **[Prop]:** Dado $p \in \mathbb{R}^n$ fijo, se tendrá:

$$L_{p,d} = L_{p,\bar{d}} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \bar{d} = \lambda d$$

- **[Vectores Paralelos]:** Sean $v, w \in \mathbb{R}^n$. El vecotr v se dice paralelo a w si $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : w = \lambda v$. Sea anota $v \parallel w$

- **[Traslación de un conjunto]** Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $p \in \mathbb{R}^n$ definimos la traslación de A en el vector p por:

$$p + A = \{p + x : x \in A\}$$

- **[Prop]** Las rectas que pasan por $p \in \mathbb{R}^n$ son las traslaciones en p de las rectas que pasan por el origen.
- **[Prop]** Sean $p, q \in \mathbb{R}^n$, con $p \neq q$. La recta de posición p y vector director $d = q - p$ es la única que pasa por ambos puntos, p y q .
- **[Plano]** Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $d_1, d_2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ no paralelos se define el plano que pasa por p como:

$$\Pi_{p,d_1,d_2} = \{v \in \mathbb{R}^n : v = p + sd_1 + td_2, s, t \in \mathbb{R}\}$$

- **[Obs]:** $v = p + sd_1 + td_2, s, t \in \mathbb{R}$ se llama ecuación vectorial del plano

- Dado $p \in \mathbb{R}^n$, todo plano que pasa por p es la traslación en p de un plano que pasa por el origen, y si trasladamos en p un plano cualquiera que pasa por el origen, obtenemos un plano que pasa por p

- **[Puntos colineales]** p, q, r se dice colineales si $p \in L_{q,r-p}$

- Sean p, q, r tres puntos no colineales en $\mathbb{R}^n$. Probar que si $d_1 = q - p$ y $d_2 = r - p$, entonces Π_{p,d_1,d_2} es el único plano que pasa por p, q y r

- **[Ecuaciones cartesianas Recta]** Sea $p = (p_1, \dots, p_n)^t \in \mathbb{R}^n$ y $d = (d_1, \dots, d_n)^t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ las ecuaciones cartesianas de $L_{p,d}$ son de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{x_1 - p_1}{d_1} &= \frac{x_2 - p_2}{d_2} = \dots = \frac{x_k - p_k}{d_k} \\ x_{k+1} &= p_{k+1} \\ &\vdots \\ x_n &= p_n \end{aligned}$$

Se obtienen despejando t y son n incógnitas y $n - 1$ ecuaciones

- **[Ecuaciones cartesianas Plano]** Haciendo el mismo analisis anterior se tiene que en $\mathbb{R}^3$ existen $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ con A, B ó $C \neq 0$ tal que:

$$x \in \Pi \iff D = Ax + By + Cz$$