

AUX 8 Pauta

P1) En $\mathbb{R}^3$ considere

$$L_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$L_2: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

a) encuentre las ecuaciones cartesianas de las rectas

sol

$$L_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = 0 + \lambda$$

$$y = 5 - 3\lambda$$

$$z = 1 + 2\lambda$$

$$\rightarrow x = \lambda$$

$$\frac{5-y}{3} = \lambda \Rightarrow x = \frac{5-y}{3} = \frac{z-1}{2}$$

$$\frac{z-1}{2} = \lambda$$

$$L_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow x = 1 + 2s$$

$$y = 2 + 4s$$

$$z = 3 + s$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{2} = s$$

$$\frac{y-2}{4} = s$$

$$z-3 = s$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = z-3 //$$

b) demuestre que L_1 y L_2

se intersectan y encuentren
la intersección

sol

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in L_1 \cap L_2 \text{ si}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 0 + \lambda = 1 + 2s$$

$$5 - 3\lambda = 2 + 4s$$

$$1 + 2\lambda = 3 + s$$

$$\rightarrow 1 + 2[1 + 2s] = 3 + s$$

$$\rightarrow 1 + 2 + 4s = 3 + s$$

$$\rightarrow 3s = 0 \rightarrow s = 0$$

luego las ecuaciones quedan

$$\lambda = 1 + 2 \cdot 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$5 - 3\lambda = 2 + 4 \cdot 0 \rightarrow \lambda = 1$$

$$1 + 2\lambda = 3 + 0 \rightarrow \lambda = 1$$

∴ si se interseccionan

$$\text{en } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} //$$

P2] Sea π um plano em $\mathbb{R}^n$
mostre que π es um ser ssi $0 \in \pi$

Sol

$$\Rightarrow) 0 \in \pi \quad p \in \pi \text{ ser ser}$$

$$\Leftarrow) 0 \in \pi, \text{ sea } d_1, d_2 \text{ y } p \neq$$

$$\pi = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = p + \lambda d_1 + \mu d_2; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$0 \in \pi \therefore \exists \tilde{\lambda}, \tilde{\mu} \in \mathbb{R} \text{ t.q.}$$

$$0 = p + \tilde{\lambda} d_1 + \tilde{\mu} d_2$$

$$\Rightarrow p = -\tilde{\lambda} d_1 - \tilde{\mu} d_2$$

$$\therefore \pi = \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = -\tilde{\lambda} d_1 + \lambda d_1 + \mu d_2 - \tilde{\mu} d_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = [\lambda - \tilde{\lambda}] d_1 + [\mu - \tilde{\mu}] d_2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{v \in \mathbb{R}^n \mid v = \hat{\lambda} d_1 + \hat{\mu} d_2, \hat{\lambda}, \hat{\mu} \in \mathbb{R}\}$$

$$= \langle \{d_1, d_2\} \rangle, \text{ luego } \pi \text{ es ser}$$

P3] Sean $(\Pi_i)_{i=1}^3$ Planos de $\mathbb{R}^3$
 muestre que siempre se tiene
 que la intersección de ellos es
 una de las siguientes opciones

- a) No se intersecan
- b) Se intersecan en un único punto
- c) se intersecan en una recta
- d) son todos iguales

concluya que para la intersección
 de $m \geq 3$ se mantiene el resultado

Sol

sabemos que

$$\Pi_i = \{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v = p_i + \lambda \cdot d_i + \mu \cdot q_i; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

veo esto damos $\Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$

como estamos en $\mathbb{R}^3$ tenemos
 que existen constantes T_i q

$$\Pi_1: A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 = D_1$$

$$\Pi_2: A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = D_2$$

$$\Pi_3: A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 = D_3$$

luego $x \in \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ si se tienen
el sistema

$$A_1 x_1 + B_1 x_2 + C_1 x_3 = D_1$$

$$A_2 x_1 + B_2 x_2 + C_2 x_3 = D_2$$

$$A_3 x_1 + B_3 x_2 + C_3 x_3 = D_3$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

luego si el sistema es
incompatible no se intersectan

ahora si el sistema es
compatible, no tenemos que por
prop alguna de las ctes A_1, B_1, C_1
es no nula luego algunas de las
columnas es no nula

$\therefore$ hay 3 opciones

- el sistema tiene solución única
- hay una variable libre
- hay dos variable libre

- si tiene solución única, la intersección es un punto
- si tiene una variable libre la solución es una recta
- si hay dos variables libres mostremos que $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$

Por simetría basta ver

$$\text{que } \pi_1 = \pi_2$$

el sistema de ecuaciones es

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

donde sea $v \in \pi_1$

$\Rightarrow v = (v_1, v_2, v_3)$, hay dos variables libres por simetría suponemos x_1, x_2 luego sea $x_1 = v_1, x_2 = v_2$

$$\Rightarrow \exists x_3 \quad \text{T. q}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A_1 v_1 + B_1 v_2 + C_1 x_3 = D_1$$

$$\underline{\text{Si}} \quad C_1 \neq 0 \Rightarrow x_3 = v_3$$

$$\text{si } C_1 \neq 0 \quad A_2 v_1 + B_2 v_2 + C_2 x_3 = D_2$$

$$\Rightarrow (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$$

$$\underline{\text{Si}} \quad C_1 = 0 \quad \text{notamos que}$$

$$A_1 x_1 + B_1 x_2 = D_1 \quad \forall x_1, x_2$$

$$\text{ahora si } x_1 = x_2 = 0$$

$$\Rightarrow D_1 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 x_1 + B_1 x_2 = 0 \quad \text{sea } x_1 = 0$$

$$\Rightarrow B_1 x_2 = 0 \quad \forall x_2$$

$$\Rightarrow B_1 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 x_1 = 0 \quad \forall x_1$$

$$\Rightarrow A_1 = 0$$

pero sabemos que

$$A_1 \text{ ó } B_1 \text{ ó } C_1 \neq 0$$

$\rightarrow \leftarrow$

$$\therefore C_1 \neq 0$$

así concluimos

$$\Pi_2 \subseteq \Pi_1$$

analogamente

$$\Pi_1 \subseteq \Pi_2, \text{ basta intercambiar}$$

A_1, B_1, C_1, D_1 por A_2, B_2, C_2, D_2

$$\text{así } \pi_1 = \pi_2 = \pi_3 //$$

Por lo tanto $n \geq 3$ basta considerar

$$\bigcap_{i=1}^n \pi_i = \bigcap_{i=1}^{n-2} \pi_i \cap \pi_{n-1} \cap \pi_n$$

Y actuamos inductivamente //

P₄)

a) Sean $P, Q, R \in \mathbb{R}^3$ tres puntos
no colineales. Sea π el plano
que contiene a P, Q, R por P, Q, R

$$X \in \pi \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ t. q.}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$X = \alpha P + \beta Q + \gamma R$$

sol

sabemos que el único plano
que pasa por π tres puntos
no colineales es el π

$$\begin{aligned}\pi &= \{ v \mid v = p + \lambda(\pi - p) + \bar{\beta}(q - p) \} \\ &= \{ v \mid v = p[1 - \lambda - \bar{\beta}] + \lambda\pi + \bar{\beta}q \}\end{aligned}$$

luego si $x \in \pi$

$$\Rightarrow \exists \lambda, \bar{\beta} \in \mathbb{R} \text{ y } q$$

$$x = p[1 - \lambda - \bar{\beta}] + \lambda\pi + \bar{\beta}q$$

$$\text{luego } \alpha = 1 - \lambda - \bar{\beta}$$

$$\beta = \bar{\beta}$$

$$\gamma = \lambda$$

completenlo pedidlo //

⊆

$$x = \alpha p + \beta q + \gamma r$$

$$= (1 - \beta - \gamma) p + \beta q + \gamma r$$

$$= p + \beta(q - p) + \gamma(r - p)$$

$$\Rightarrow x \in \Pi //$$

b) considere las rectas

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$$

Pruebe que el plano que
contiene a L_1 y L_2 tiene
por ecuación cartesiana

$$x + y - z = 1$$

Sol

$$Ax + By + Cz = D \text{ es}$$

la forma general

$$\text{ luego } \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 1 \\ 1+\lambda \end{pmatrix} \in L_1 \quad \forall \lambda$$

así que tenemos que

$$A(1+\lambda) + B + C(1+\lambda) = D$$

a su vez

$$\begin{pmatrix} 1+s \\ 0 \\ s \end{pmatrix} \in L_2 \text{ wegen}$$

$$A(1+s) + Cs = D$$

forall s

$$A + As + Cs = D$$

$$\Rightarrow [A + C]s = D - A \quad \forall s$$

$$\Rightarrow D - A = 0$$

$$A + C = 0$$

$$\therefore D = A = -C$$

Polynomiale Bedingung

$$A(1+\lambda) + B + C(1+\lambda) = D$$

$$\Rightarrow \text{Coeff} \quad A = -C$$

$$B = D$$

$$1 \neq 0 \quad B = D = A = -C$$

$$\Rightarrow Ax + By + Cz = D$$

$$\Rightarrow Ax + Ay - Az = A$$

• Como alguna de A, B, C es

no nula $\Rightarrow A \neq 0$, así

dividiendo

$$x + y - z = 1 //$$

P5

a) Verifique que las rectas

$$L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in \mathbb{R}}, \quad L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}_{\mu \in \mathbb{R}}$$

se intersectan en un único punto. En el evento no.

sol

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 3 - \lambda = 2 + 2\mu \quad (1)$$

$$4 + 2\lambda = 4 + \mu \quad (2)$$

$$5 - 5\lambda = 6 - 5\mu \quad (3)$$

$$2 \cdot (1) + (2)$$

$$\Rightarrow -10 = 8 + 5\mu \Rightarrow \mu = -\frac{18}{5}$$

$$\rightarrow 3 - \lambda = 2 + \frac{4}{5}$$

$$4 + 2\lambda = 4 + \frac{2}{5}$$

$$5 - 5\lambda = 6 - 5 \cdot \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow 3 - \lambda = \frac{14}{5}$$

$$4 + 2\lambda = \frac{22}{5}$$

$$5 - 5\lambda = 4$$

$$\rightarrow \lambda = 3 - \frac{14}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\lambda = \frac{\frac{22}{5} - 4}{2} = \frac{1}{5}$$

$$\lambda = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \underbrace{\frac{2}{5}}_{\lambda} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 14 \\ 22 \\ 20 \end{pmatrix}$$

b) Sea π el plano con vectores directores $d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $d_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ que pasa por el punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, y sea L la recta con vector director $d = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ que pasa por el punto $Q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$, encuentre los valores de a, b t. q.

1) L este contenida en π

2) $L \not\subset \pi$ no tengan puntos en común

3) $L \cap \pi$ contenga exactamente un punto

sol estudiamos

$$L \cap \Pi$$

$$L = \{ v \mid v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$$\Pi = \{ v \mid v = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \}$$

$$\begin{aligned} L \cap \Pi &= \{ v \mid v = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$a + \lambda = 0 + 1 + 4\beta$$

$$b\lambda = -2 + 2\alpha$$

$$0 = 1 + 3\alpha + 4\beta$$

$$a = -\lambda + \alpha + 4\beta$$

$$2 = -b\lambda + 2\alpha$$

$$-1 = 3\alpha + 4\beta$$

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -b & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

luego

- si el sistema tiene solución única se intersectan en un solo punto
- si el sistema no es compatible
L y T no tienen puntos en común

• si el sistema tiene infinitas sol. hay que estudiar por caso

$$\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -b & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Por simplicidad $\rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & -b \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & a \\ 2 & 0 & -b & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow F'_2 &= F_2 - 2F_1 \\ F'_3 &= F_3 - 3F_1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 2-b \\ 0 & -8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 2-2a \\ -1-3a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & a \\ 0 & -8 & 2-b & 2-2a \\ 0 & 0 & b+1 & -3-a \end{array} \right)$$

luego

- 3) se tiene si $b \neq -1$
- 2) se tiene si $b = -1$ y $a \neq -3$
- 1) tiene m que hacen infinitas soluciones luego

$$b = -1 \quad a = -3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & -8 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{luego } \alpha + 4\beta - \lambda = -3$$

$$-8\beta + 3\lambda = 8$$

$$\rightarrow 8\beta = 3\lambda - 8$$

$$2\alpha = -6 + 2\lambda - 3\lambda + 8 = 2 - \lambda$$

$$\Rightarrow \forall \lambda, \exists \alpha, \beta \quad \text{t.d.}$$

$$x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in L$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{2-\lambda}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3\lambda-8}{8} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x \in \Pi$$

$$\therefore L \subseteq \Pi //$$

$$\text{w.r.t. } h = -1 \quad \text{and } a = -3 //$$

P61

se define $C^n([a,b]) = \{y: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : y$

tenga derivadas hasta orden n
y son continuas en $[a,b]\}$

Demostrear que $C^n([a,b])$ es
un ser de las funciones

sol

1- $C^n([a,b]) \neq \emptyset$, sea $y(x) = 0 \forall x$

$\Rightarrow y^{(k)}(x) = 0 \forall x, \forall k \Rightarrow y \in C^n([a,b])$

$\Rightarrow C^n([a,b]) \neq \emptyset$

2- $\forall f, g \in C^n([a,b]), \forall \lambda \in \mathbb{R} \lambda f + g \in C^n([a,b])$

Por la ley de la composición de
funciones diferenciables se
concluye.

$\therefore C^n([a,b])$ es ser

sea $a_i, i=0, \dots, n-1 \in C^n([a,b])$ y $a_n \equiv 1, [a_n(x) = 1 \forall x]$

se define el conjunto

$\mathcal{H} = \{y \in C^n([a,b]) : \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) = 0 \forall x \in [a,b]\}$

Demosttrar que $\mathcal{H}$ es un s.v.
 con herramientas que escapan del
 curso se puede mostrar que $\dim(\mathcal{H}) = n$

EO)

- $\mathcal{H} \neq \emptyset$

- basta tomar $y(x) = 0 \quad \forall x \Rightarrow y \in \mathcal{H}$
 $\Rightarrow \mathcal{H} \neq \emptyset$

- $f, g \in \mathcal{H}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + g \in \mathcal{H}$

así sea

$$\sum_{i=0}^m a_i(x) [\lambda f + g]^{(i)}(x)$$

$$= \sum_{i=0}^m a_i(x) [\lambda f^{(i)}(x) + g^{(i)}(x)]$$

$$= \sum_{i=0}^m a_i(x) \cdot \lambda f^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^m a_i(x) g^{(i)}(x)$$

$$= \lambda \cdot \sum_{i=0}^m \overset{0}{a_i(x)} f^{(i)}(x) + \sum_{i=0}^m \overset{0}{a_i(x)} g^{(i)}(x) \quad / f, g \in \mathcal{H}$$

$$= \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \Rightarrow \lambda f + g \in \mathcal{H}$$

luego $\mathcal{H}$ es ser.

Ahora, además sea $Q \in \mathcal{C}^m([a,b])$

se define $S = \{ y \in \mathcal{C}^m([a,b]) : \sum_{i=0}^m a_i(x) y^{(i)}(x) = Q(x) \forall x \}$

pod $\forall y_p \in S, S = y_p + \mathcal{H}$

Por doble inclusión

sea $y_p \in S$ fijo para la dem.

$\subseteq$

sea $y \in S \Rightarrow$ mostremos que

$$y - y_p \in \mathcal{H}$$

$$\sum_{i=0}^m a_i(x) [y - y_p]^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^m a_i(x) y^{(i)}(x) - \sum_{i=0}^m a_i(x) y_p^{(i)}(x)$$

$$\begin{aligned} y, y_p \in S &\hookrightarrow \\ &= Q(x) - Q(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{iv) ego } y - y_p \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow y = y_p + (y - y_p)$$

$\in \mathcal{H}$

$$\Rightarrow y \in y_p + \mathcal{H}$$

$$\underline{\exists} \text{ s.t. } y \in y_p + \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow y = y_p + y_h, \quad y_h \in \mathcal{H}$$

$$\text{iv) ego } \text{veremos que } y \in \mathcal{S}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(i)}(x) &= \sum_{i=0}^n a_i(x) [y_p + y_h]^{(i)}(x) \\ &= \sum_{i=0}^n a_i(x) y_p^{(i)}(x) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n a_i(x) y_h^{(i)}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} y_p \in \mathcal{S} \\ y_h \in \mathcal{H} \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} &\leftarrow \\ &= Q + 0 \\ &= Q \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \in S$$

$$\therefore S = y_p + \mathcal{H} \quad \forall y_p \in S$$

concluía que $\forall y \in S, \exists \{y_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{H}$ tal

$$\text{t. q. } \forall y_p \in S, \exists \{c_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R} \text{ t. q.}$$

$$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + y_p$$

Sea $\{y_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{H}$ base de $\mathcal{H}$

luego

$$\text{si } y \in S \quad \exists y_n \text{ t. q.}$$

$$\Rightarrow y = y_p + y_n, \quad y_n \in \mathcal{H}$$

$$\Rightarrow \exists \{c_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R} \text{ t. q.}$$

$$y_n = \sum_{i=1}^n c_i y_i \quad \text{por q. } y_i \text{ base}$$

$$\Rightarrow y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n + y_p //$$

Ejercicio:

como hecho demostrar

- que las funciones que cumplen $f'(x) = f(x)$ son de la forma $f(x) = ce^{x/c}$ y $c \in \mathbb{R}$

Sol notemos

- que si $m=1$ $a_0(x) = -1$

$$\Rightarrow x \in I \text{ y } y \in C^1([a, b]) \mid f'(x) - f(x) = 0$$

es decir f sol si $f \in \mathcal{H}$

ahora $\dim(\mathcal{L}) = 1$

y sabemos $f(x) = e^x$ es t. q
 $f'(x) = f(x)$

y además es li

$\Rightarrow$ las funciones de $\mathcal{H}$ son

$$\mathcal{H} = \{ f \mid f(x) = c e^x, c \in \mathbb{R} \}$$

luego las únicas que cumplen

eso son de la forma $c e^x$ //