

MA1102-4 Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliar: Sebastián Bustos



Pauta P6 Auxiliar 6

P6. **Pregunta difícil 1** Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Y sea $\mathcal{F}(V, \mathbb{K})$ el espacio vectorial de las funciones $f : V \rightarrow \mathbb{K}$ donde se define $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ y $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$. Se define

$$V^* = \{f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{K}) \mid f \text{ es un morfismo de } (V, +) \text{ a } (\mathbb{K}, +)\}$$

a) Muestre que V^* es sev de $\mathcal{F}(V, \mathbb{K})$

Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V (fija durante el problema). Si $u \in V$ entonces $u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Definimos la función

$$\phi_j(u) = x_j \text{ donde } j \in \{1, \dots, n\}$$

a) Muestre que ϕ_j esta bien definida como función y que $\phi_j \in V^*$

b) Pruebe que una base del espacio V^* es $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$

Observación: Se me olvido agregar una condición a V^* , si a alguien no le salía por eso perdon :'(

$$V^* = \{f \in \mathcal{F}(V, \mathbb{K}) \mid f \text{ es un morfismo de } (V, +) \text{ a } (\mathbb{K}, +) \text{ y } f(\alpha v) = \alpha f(v) \forall v \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}\}$$

Solución

Primera Parte a

(Lo que su compañero subió a material alumnos esta en escencia bien, voy a tipear mas o menos lo mismo con mis palabras)

Nos piden demostrar que V^* es un sev de $\mathcal{F}(V, \mathbb{K})$. Para esto probemos por la caracterización.

Primero veamos que $V^* \neq \emptyset$ para esto basta notar que la función $f(x) = 0, \forall x \in V$ es un morfismo y cumple la propiedad de sacar el escalar luego $V^* \neq \emptyset$

Ahora veamos que $\forall f, g \in V^*, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda f + g \in V^*$. Sabemos de intro al algebra que suma de morfismos es morfismos, por tanto basta probar que λf es morfismo (recordar $f : (G, *) \rightarrow (V, \Delta)$ es morfismo si $f(x * y) = f(x) \Delta f(y)$) y que $(\lambda f + g)(\alpha v) = \alpha(\lambda f + g)(v)$, notar que:

$$(\lambda f)(x + y) = \lambda f(x + y) = \lambda(f(x) + f(y)) = \lambda f(x) + \lambda f(y) = (\lambda f)(x) + (\lambda f)(y)$$

Lugo es morfismo.

Por tanto por suma de morfismos $\lambda f + g$ es morfismo

Ahora notemos que:

$$(\lambda f + g)(\alpha v) = (\lambda f)(\alpha v) + g(\alpha v) = \lambda f(\alpha v) + \alpha g(v) = \lambda(\alpha f(v)) + \alpha g(v) = \alpha(\lambda f(v) + g(v)) = \alpha(\lambda f + g)(v)$$

Donde la pen-ultima igualdad se tiene por $\mathbb{K}$ cuerpo, en particula conmuta y podemos factorizar por α .

Entonces $\lambda f + g \in V^*$, concluimos que V^* es sev.

Segunda Parte a

Nos piden mostrar que ϕ_j esta bien definida como función y que $\phi_j \in V^*$

Que este bien definida va en el sentido que si tengo un vector $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ a priori podría existir otro conjunto de escalares $\{y_i\}$ tal que $v = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ y por tanto dependiendo de la escritura tendríamos que $\phi_j(v) = x_j$ ó y_j lo cual implica que ϕ_j no sería función.

Ahora **sabemos** que la descomposición en una base es única es decir que si $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ entonces $x_i = y_i \forall i$ entonces concluimos que ϕ_j esta bien definida ya que el escalar x_j es único para cada v .

Por otro lado para ver que es morfismo, sea $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ y $u = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ por demostrar que $\phi_j(u + v) = \phi_j(u) + \phi_j(v)$. Para esto notar que:

$$\phi_j(u + v) = \phi_j\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i + \sum_{i=1}^n y_i v_i\right) = \phi_j\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) v_i\right) = x_j + y_j = \phi_j\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) + \phi_j\left(\sum_{i=1}^n y_i v_i\right) = \phi_j(v) + \phi_j(u)$$

Luego es morfismo para cualquier j .

Ademas

$$\phi_j(\alpha u) = \phi_j\left(\alpha \sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \phi_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha x_i v_i\right) = \alpha x_j = \alpha \phi_j(u)$$

Y por lo tanto $\phi_j \in V^*$

Parte b

Ahora para probar que una base del espacio V^* es $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ tenemos que mostrar que generan y son li.

Veamos primero que son li:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) = 0, \forall x \in V$$

En particular tomando $x = v_j$ tenemos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(v_j) = \alpha_j \cdot 1 = \alpha_j$.

Ahora siempre tenemos que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(x) = 0$ luego $\alpha_j = 0 \forall j$ y por tanto son li.

Veamos que genera el espacio de morfismo.

Sea $f \in V^*$ luego sea $u = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ tenemos que:

$$f(u) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i v_i) = \sum_{i=1}^n x_i f(v_i) = \sum_{i=1}^n f(v_i) x_i = \sum_{i=1}^n f(v_i) \phi_i(u)$$

Y por tanto las constantes serían $a_i = f(v_i)$ y concluiríamos que $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ generan.

Son li y generan entonces son base. ■