

MA1102-4 Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliar: Sebastián Bustos



Pauta P5 Auxiliar 6

P5. **Pregunta difícil 1** Sea un cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $|\mathbb{K}| > n - 1$, sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

- Muestre que V no es igual a la union de n sub espacios propios de V .
- Concluya, en base a lo realizado anteriormente, que si $m \geq 2$ entonces se necesita una cantidad no numerable de sub espacios propios de $\mathbb{R}^m$ para que $\mathbb{R}^m$ sea la union de los sub espacios.

Diremos que un sev es propio si no es el ev completo.

Solución

Parte a

Nos piden probar que $V \neq \bigcup_{i=1}^n U_i$ donde U_i es un sev propio de V es decir: es un sub espacio de V y además $V \neq U_i$.

Recordemos primero que vimos en el aux 4 que:

Si V es un ev sobre $\mathbb{K}$ (un cuerpo cualquiera) y S, T sev de V se tiene que:

$$S \cup T \text{ es sev de } V \iff S \subseteq T \text{ ó } T \subseteq S$$

Ahora cuando $n \geq 3$ el problema se complica.

Para esto actuaremos por contradicción, es decir $V = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Ahora sin perder generalidad podemos suponer que $U_i \not\subseteq U_j$ y $U_j \not\subseteq U_i, \forall i \neq j$.

Ya que de no ser así significa que, negando la proposición $\exists i \neq j$ tal que $U_i \subseteq U_j$ ó $U_j \subseteq U_i$. Luego si $U_i \subseteq U_j$ (el otro caso es analogo cambiando el rol de i / j) tenemos que:

$$\bigcup_{k=1}^n U_k = \bigcup_{\substack{k \in \{1, \dots, n\} \\ k \neq i}} U_k$$

Donde la derecha dice sumamos todos los espacios salvo U_i . Y son iguales por que al unir U_j estamos considerando U_i . Luego en realidad la union de sub espacios es de $n - 1$ elementos **no** de n lo cual contradice la hipotesis de que se puede escribir como n sub espacios propios.

Nota de vida: Cuando decimos que se puede escribir como n sub espacios propios en general nos referimos a que en la forma mas reducida posible, siempre puedo unir el mismo elementos infinitas veces y se cumpliría todo la idea es que sean elementos distintos unidos, igual siempre pueden preguntar para aclarar eso si tienen dudas de esos detalles.

Ahora sabemos que $U_i \not\subseteq U_j$ y $U_j \not\subseteq U_i, \forall i \neq j$. Por tanto consideremos la siguiente selección de elementos:

$$v \notin U_1, u \in U_1, u \notin \bigcup_{i=2}^n U_i$$

Para poder hacer esta selección tenemos que verificar varias cosas:

- a) U_1 tiene al menos 1 elemento. (Para poder elegir u tal que $u \in U_1$)
- b) U_1 tiene un elemento $\tilde{u}$ tal que $\tilde{u} \notin \bigcup_{i=2}^n U_i$
- c) existe un elemento $v \in V$ tal que $v \notin U_1$

Ahora notemos que si probamos b hemos probado a .

Ahora como U_1 es un sev por lo tanto $U_1 \neq \emptyset$ (por la caracterización) luego U_1 tiene al menos un elemento. Así en verdad los resultados problemáticos a probar son solo

- b) U_1 tiene un elemento $\tilde{u}$ tal que $\tilde{u} \notin \bigcup_{i=2}^n U_i$
- c) existe un elemento $v \in V$ tal que $v \notin U_1$

Veamos primero b .

Si no fuera cierto tendríamos que:

$$\forall u \in U_1, u \in \bigcup_{i=2}^n U_i$$

Lo anterior significa que $U_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^n U_i$, luego tenemos que:

$$V = \bigcup_{i=1}^n U_i = \bigcup_{i=2}^n U_i$$

Por lo tanto V en verdad era la unión de $n - 1$ sev lo cual es una contradicción.

Para el caso c .

Sabemos que $U_i \not\subseteq U_j$ y $U_j \not\subseteq U_i, \forall i \neq j$. En particular $U_2 \not\subseteq U_1$ es decir $\exists v \in U_2 \setminus U_1$ esto quiere decir $v \in U_2$ y $v \notin U_1$. Ahora $U_2 \subseteq V$ es decir $v \in V$ y $v \notin U_1$ que cumple lo que queríamos.

Ahora construyamos el siguiente conjunto:

$$L = \{v + tu \mid t \in \mathbb{K}\}$$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $U = \mathbb{R}^n$ no es difícil convencerse que este conjunto es una noción de “recta afín”.

Primero notemos que $|L| = |\mathbb{K}|$.

Por completitud de este mini escrito lo vamos a demostrar. Para esto construyamos la biyección:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K} &\rightarrow L \\ t &\mapsto v + tu. \end{aligned}$$

En primer lugar, por la definición de L , $f(\mathbb{K}) = L$ es decir f es epiyectiva. Luego basta ver inyectividad:

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\iff v + xu = v + yu \\ &\iff (x - y)u = 0 \\ &\implies x = y \text{ por } u \neq 0 \end{aligned}$$

Ahora, a priori, $u \neq 0$ no tiene que ser verdad. Pero **si** $u = 0$ entonces $u \in U_i, \forall i$ lo cual significa que $u \in \bigcup_{i=2}^n U_i$ que es una contradicción a la elección de u .

Luego lo que utilizamos entonces fue que $\lambda u = 0$ y $u \neq 0 \implies \lambda = 0$. Demostremos esa propiedad:

Supongamos que $\lambda \neq 0$ luego λ^{-1} existe por estar un cuerpo entonces $\lambda^{-1}(\lambda u) = \lambda^{-1}0$.

Ahora $\lambda^{-1}0 = 0$ por propiedad de los espacios vectoriales, por el axioma de los espacios vectoriales $\lambda^{-1}(\lambda u) = (\lambda^{-1}\lambda)u$.

Después por definición de inverso $\lambda^{-1}\lambda = 1$ luego $\lambda^{-1}(\lambda u) = 1u$ y $1u = u$ por axiomas de los espacios vectoriales.

Con esto llegamos a que $u = 0$ lo cual es una contradicción por tanto $\lambda = 0$ (por ser el único elemento sin inverso multiplicativo).

Por tanto llegamos a que $f(x) = f(y) \implies x = y$ por tanto es inyectiva. Luego como también es epiyectiva es una biyección y por definición de cardinal tenemos que $|\mathbb{K}| = |L|$.

Ahora probemos las siguientes propiedades:

- a) $L \cap U_1 = \emptyset$ y por tanto $|L \cap U_1| = 0$
- b) $|L \cap U_j| \leq 1, \forall j \geq 2$

Probemos *a*.

Supongamos que no es cierto luego $\exists x \in L \cap U_1$, como $x \in L$ se escribe de la forma $v + tu$ con algún $t \in \mathbb{K}$ ahora $x \in U_1$ por lo tanto $v + tu \in U_1$.

U_1 es sev por lo tanto $(v + tu) - tu \in U_1$, esto por que $u, v + tu \in U_1$ luego $v \in U_1$ lo cual es una contradicción a la elección de v .

Concluimos que $L \cap U_1 = \emptyset$ en particular tenemos que $|L \cap U_1| = 0$ por que $|\emptyset| = 0$.

Probemos *b*.

Supongamos que no es cierto que $|L \cap U_j| \leq 1$ es decir $|L \cap U_j| \geq 2$. Es decir existen $x, y \in L \cap U_j$ con $x \neq y$. Luego $x, y \in L$ por lo tanto existen $t_x, t_y \in \mathbb{K}$ tal que $x = v + t_x u, y = v + t_y u$, y además $t_x \neq t_y$ por que de serlo tendríamos que $x = y$. A su vez tenemos que $x, y \in U_j$

Ahora notemos que por U_j ser sev tenemos que $x - y \in U_j$, es decir $(t_x - t_y)u \in U_j$ luego como $t_x - t_y \neq 0$ tenemos que $(t_x - t_y)^{-1}$ existe y por ende $(t_x - t_y)^{-1}((t_x - t_y)u) \in U_j$, es decir $u \in U_j$. **Pero** teníamos que $u \notin \bigcup_{i=2}^n U_i$ que, por definición de union, significa que $u \notin U_k \forall k \geq 2$ luego contradicción a la elección de u . Con

esto tenemos que $|L \cap U_j| \leq 1 \quad \forall j \geq 2$ (nunca utilizamos j).

Ahora recordemos que si $|A_i| < \infty \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$, entonces tenemos que:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |A_i|$$

Así notamos que:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n (L \cap U_i) \right| \leq \sum_{i=1}^n |L \cap U_i|$$

En primer lugar $\bigcup_{i=1}^n (L \cap U_i) = L \cap \bigcup_{i=1}^n U_i$ por distributividad, es decir $\bigcup_{i=1}^n (L \cap U_i) = L \cap V$.

En segundo lugar notamos que $\sum_{i=1}^n |L \cap U_i| = \sum_{i=2}^n |L \cap U_i|$ por que $|L \cap U_1| = 0$. A su vez $|L \cap U_i| \leq 1$, es decir:

$$\sum_{i=1}^n |L \cap U_i| \leq \sum_{i=2}^n 1 = n - 1$$

Juntando todo concluimos que $|L \cap V| \leq n - 1$. Ahora por hipótesis $|\mathbb{K}| > n - 1$, es decir tenemos que $|L \cap V| < |\mathbb{K}|$ y probamos que $|\mathbb{K}| = |L|$ es decir $|L \cap V| < |L|$

Ahora por V ser el espacio completo se tiene que $L \subseteq V$ es decir tenemos que $L \cap V = L$ entonces tenemos que $|L| < |L|$ lo cual es una contradicción.

Entonces concluimos que V no es igual a la unión de n sub espacios propios. ■

Parte b

Como les dije en el auxiliar puede ser que dependiendo como se hiciera la parte *a* esta parte era independiente.

Ahora notemos que el escalar de $\mathbb{R}^m$ es $\mathbb{R}$. Luego también observamos que $|\mathbb{R}| > n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ es decir $\mathbb{R}^m$ **NO** puede ser escrito como unión finita de sub espacios propios por la parte *a*.

Nos falta mostrar que no puede ser escrito como unión numerable de sub espacios propios y que **si** puede ser escrito como unión no numerable de sub espacios propios.

Primero definamos para $x \in \mathbb{R}^m$, $U_x = \{tx \in \mathbb{R}^m \mid t \in \mathbb{R}\}$ el cual es un sev propio.

De ser sev es propio porque si $x = \{0, \dots, 0\}$ $U_x = \{0\}$. Si no, existe una componente de x , digamos i , tal que $x_i \neq 0$ luego observamos que $\{1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1\} \notin U_x$ donde el 0 está puesto en la posición i , luego $U_x \neq \mathbb{R}^m$.

Ahora veamos que es sev.

Utilizemos la caracterización $U_x \neq \emptyset$ por que $\mathbb{R} \neq \emptyset$ y por que $tx \in \mathbb{R}^m$ por $\mathbb{R}^m$ es sev.

Luego nos falta ver que $\forall u, v \in U_x, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda u + v \in U_x$.

Como $u, v \in U_x$ tenemos que $u = t_u x, v = t_v x$. Luego $\lambda u + v = \lambda t_u x + t_v x = (\lambda t_u + t_v)x = \tilde{t}x$ con $\tilde{t} = \lambda t_u + t_v$ ahora por las operaciones de $\mathbb{R}$ tenemos que $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ luego concluimos que $\lambda u + v \in U_x$.

Nunca utilizamos nada de x por ende $\forall x \in \mathbb{R}^m$, U_x es subespacio propio de $\mathbb{R}^m$.

Ahora notemos que $U_x \subseteq \mathbb{R}^m$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$ luego, por propiedades de la union, $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} U_x \subseteq \mathbb{R}^m$.

Por ultimo notamos que $x \in U_x$ (tomando $t = 1$) es decir $\{x\} \subseteq U_x$ luego por mismo argumento anterior tenemos que $\bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} U_x$.

Ahora notamos que $\mathbb{R}^m = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} \{x\}$ por ende tenemos que:

$$\mathbb{R}^m \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} U_x \text{ y } \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} U_x \subseteq \mathbb{R}^m$$

Por ende concluimos que $\mathbb{R}^m = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^m} U_x$.

Ahora nos falta probar que no puede ser escrito como union numerable de sub espacios propios.

Primero probaremos que si $\mathbb{R}^m$ es union numerable de sub espacios propios entonces podemos suponer sin perdida de generalidad que todos tienen dimensión $m - 1$.

Supongamos que $\mathbb{R}^m = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ con U_i sub espacio de $\mathbb{R}^m$. Luego como U_i es un sub espacio de $\mathbb{R}^m$ $\dim(U_i) \leq \dim(\mathbb{R}^m) = m$. Es mas como U_i es sub espacio propio podemos asegurar que $\dim(U_i) \leq m - 1$. Por que sabemos que si U es sev de V y $\dim(U) = \dim(V)$ entonces $U = V$, luego como son propios no se puede tener la igualdad con m .

Por otro lado si $\dim(U_i) = k < m - 1$ consideramos su base $\{u_i\}_{i=1}^k$ y consideramos la base canonica de $\mathbb{R}^m$, $\{e_i\}_{i=1}^m$ podemos completar base, es decir $\{u_i\}_{i=1}^k \cup \{e_{i_j}\}_{j=1}^{m-k}$ es base de $\mathbb{R}^m$, en particular todos son li. Luego como $1 < m - k$ podemos quitar un elemento de $\{e_{i_j}\}_{j=1}^{m-k}$ y quedamos con el siguiente conjunto $\{u_i\}_{i=1}^k \cup \{e_{i_j}\}_{j=1}^{m-k-1}$ el cual es una base de un espacio de dimensión $m - 1$, por que los vectores siguen siendo li, y es mas $U_i \subseteq \langle \{u_i\}_{i=1}^k \cup \{e_{i_j}\}_{j=1}^{m-k-1} \rangle$.

Si nombramos $\tilde{U}_i = \langle \{u_i\}_{i=1}^k \cup \{e_{i_j}\}_{j=1}^{m-k-1} \rangle$ cuando $\dim(U_i) < m - 1$ y $\tilde{U}_i = U_i$ cuando $\dim(U_i) = m - 1$. Tenemos que:

$$U_i \subseteq \tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}^m, \forall i \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}^m$$

Luego como $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = \mathbb{R}^m$ concluimos que $\mathbb{R}^m = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tilde{U}_i$. Asi spg podemos asumir que $\dim(U_i) = m - 1$.

Para esto consideremos el siguiente conjunto:

$$S = \{(1, t, t, \dots, t^{m-1}) | t \in \mathbb{R}\}$$

Probaremos que llegamos a una contradicción con respecto a la cantidad de elementos de S .

Para esto primero estudiemos como se comportan los sub espacios de $\dim(U_i) = m - 1$.

Si $V \in U_i$ luego tenemos que si nombramos u^i los elementos de la base.

$$\begin{cases} v_1 &= t_1 u_1^1 + \cdots + t_{m-1} u_1^{m-1} \\ v_2 &= t_1 u_2^1 + \cdots + t_{m-1} u_2^{m-1} \\ \vdots &= \vdots + \cdots + \vdots \\ v_m &= t_1 u_m^1 + \cdots + t_{m-1} u_m^{m-1} \end{cases}$$

Luego tenemos m ecuaciones y $m-1$ incógnitas. Esto quiere decir pivoteando podemos eliminar el parametro t_1 de $m-1$ y dejarlo en función del resto. Después t_2 del resto y así sucesivamente. En realidad estamos diciendo que al escalar la matriz de la manera usual tiene que quedar la ultima fila una ecuación de la forma:

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 + \dots + A_m v_m = 0$$

Donde $A_i \in \mathbb{R}$ son **constantes**. Es la única forma que este sistema tenga solución por tener mas ecuaciones que incógnitas.

Luego hemos encontrado una caracterización para los sub espacios de dimensión $m-1$.

$$v \in U_i \iff 0 = A_1 v_1 + \dots + A_m v_m$$

Donde las constantes son fijas por cada sub espacio y caracterizan completamente al mismo. Por esta caracterización los sub espacios que son de dimensión 1 menor que el espacio se les llama hiperplanos.

Luego estudiemos $S \cap U_i$.

Estamos buscando que $(1, t, \dots, t^{m-1}) \in U_i$ es decir que resuelva la ecuación característica del sub espacio:

$a_1 + a_2 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1} = 0$, donde a_k son las constantes características del sub espacio. Ahora por TFA hay a lo mas $m-1$ soluciones luego $|S \cap U_i| \leq m-1$

Así notamos que $S = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S \cap U_i$ por que $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = \mathbb{R}^m$. Ahora eso es una union numerable de conjuntos finitos.

Es decir es a lo mas numerable.

Ahora la proposición es que S es no numerable, para esto basta notar que:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow S \\ t &\mapsto (1, t, t^2, \dots, t^{m-1}) \end{aligned}$$

Es inyectiva y por lo tanto $|\mathbb{R}| \leq |S|$ luego S es no numerable. Contradicción.

Y por lo tanto $\mathbb{R}^m$ no puede ser escrito como union numerable de sub espacios propios. ■