

Aux extra c1

P1 sea

$$W_1 = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\}$$

$$W_2 = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(A) = 0\}$$

a) Demuestre que W_1 es seV
de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

Sol

usemos la caracterización de
seV

recordamos: $E \in V$, luego $V \subseteq E$

es seV ssi $\forall v, w \in V \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda v + w \in V$
 $V \neq \emptyset$

luego sabemos $M_{2,2}$ es ev
así veamos la caracterización

1- $W_1 \neq \emptyset$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es t.q. } A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0$$

$$1) e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W_1 \therefore W_1 \neq \emptyset$$

$$2) \forall A, B \in W_1, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda A + B \in W_1$$

ahora mostramos, para $A, B \in W_1, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda A + B = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a + \alpha & \lambda b + \beta \\ \lambda c + \gamma & \lambda d + \delta \end{pmatrix}$$

basta ver que las componentes suman $\in \pi$ o

$$\lambda a + \alpha + \lambda b + \beta + \lambda c + \gamma + \lambda d + \delta = \lambda(a + b + c + d) + \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

ahora $A \in W_1 \therefore a+b+c+d=0$
 $B \in W_1 \therefore \alpha+\beta+\gamma+\delta=0$

$$\Rightarrow 1a+\alpha+1b+\beta+1c+\gamma+1d+\delta$$

$$= 1 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$\rightarrow 1A+B \in W_1 //$$

$$\therefore W_1 \text{ es sev de } M_{2,2}(\mathbb{R})$$

b) Demuestre que W_2 es un sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

sol

Usando la caracterización
 observamos que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ es + q } \text{traza}(A) = 0$$

$$\therefore A \in W_2 \Rightarrow W_2 \neq \emptyset$$

Obs: recordamos que

$$A \in M_{n,n} \rightarrow \text{traza}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

$$2 - \forall A, B \in W_2, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda A + B \in W_2$$

luego veamos $\text{traza}(\lambda A + B)$

$\nearrow$ propiedad general traza

$$\text{traza}(\lambda A + B) = \lambda \text{traza}(A) + \text{traza}(B)$$

$$A, B \in W_1 \quad \leftarrow \quad = \lambda \cdot 0 + 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{traza}(A) &= 0 \\ - \text{traza}(B) &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda A + B \in W_2, \text{ luego } W_2 \text{ es sub}$$

Obs: esta demostración nos asegura que en el caso general

$$W = \{ A \in M_{n,n} \mid \text{traza}(A) = 0 \} \text{ es sub}$$

c) Encuentre una base de W_1 y su dimensión

Sol

Sea $A \in W_1$ luego

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{así } a + b + c + d = 0$$

$$\rightarrow a = -b - c - d$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} -b - c - d & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

así $\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

generam.

Veamos si son li

$$a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -a-b-c & a \\ b & c \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow -a-b-c = 0$$

$\rightarrow$

$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$c = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c = 0$$

así son li. $\therefore$ Son li y generan

luego por definición son base //

ahora la dimensión es

Cuanto vectores hay en

la base, son 3 $\therefore \dim(W_1) = 3 //$

c) Extiende la base de W_1
a una base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

nuestra base es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

la base canónica de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

luego, por simplicidad de los sistemas,
estudiamos agregando vectores
hasta obtener una base.

Recordamos $\dim(M_{n,m}) = n \cdot m$

luego $\dim(M_{2,2}) = 4$

así hay que agregar 1 elemento
por que hay un teorema que dice:

$\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ son li y $\dim(V) = n$

$\Rightarrow \{v_i\}_{i=1}^n$ son base.

así veamos si

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Som 11

$$a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a-b-d+e & a \\ b & d \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow -a-b-d+e = 0 \quad (1)$$

$$a = 0 \quad (2)$$

$$b = 0 \quad (3)$$

$$d = 0 \quad (4)$$

$$(2), (3), (4) + (1)$$

$$\Rightarrow e = 0$$

$$\Rightarrow a = b = d = e = 0$$

luego Som 11, partes som base
de W_2 //

e) Encuentre una base de W_2 y de su dimensión

Sol.

$$A \in W_2$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{y } a + d = 0 \rightarrow -a = d$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ generan}$$

veamos si son l.i

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow a = 0$$

$$c = 0$$

$$b = 0$$

$$-a = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c = 0 //$$

son li y generan luego

son base $\therefore \dim(W_2) = 3$

f) Extienda la base de W_2 a
una base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

sol

Por el argumento anterior

basta revisar si al agregar

alguno de los vectores

de la base canónica siguen
siendo li

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

veamos si

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Son li. Obs: como $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

pertenecen a la base original

solo podemos elegir entre

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

luego

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d-a \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$c = 0$$

$$b = 0$$

$$d-a=0 \rightarrow d=a$$

$$\Rightarrow a=b=c=d=0$$

son li y hay tantos

Vectores como la dimensión

del espacio $\Rightarrow$ son base del espacio
teo

2) Encuentre una base
de $W_1 \cap W_2$ y su dimensión

Sea $A \in W_1 \cap W_2$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\underline{S1} \quad A \in W_1 \rightarrow a + b + c + d = 0$$

$$\rightarrow a = -b - c - d$$

$$A = \begin{pmatrix} -b - c - d & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \in W_2$$

$$\Rightarrow -b - c - d + d = 0$$

$$\rightarrow -b = c$$

luego

$$A = \begin{pmatrix} -d & b \\ -b & d \end{pmatrix}$$

$$= d \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

así un generador es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y son li por que

$$a \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} -a &= 0 \\ b &= 0 \\ -b &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = b = 0$$

luego son una base.

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$$

h) de la dimensión de $W_1 + W_2$

Sol

Hay un teo que nos dice

$$\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W)$$

luego

$$\dim(W_1 + W_2)$$

$$= \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$$

$$= 3 + 3 - 2$$

$$= 6 - 2 = 4$$

Obs como $\dim(W_1 + W_2) = 2$

podemos concluir

$$W_1 + W_2 = M_{2,2} //$$

P2 pruebe o muestre un

contra ejemplo a las

siguientes afirmaciones.

Para eso considere

$$A \in M_{m,n} \quad \text{y} \quad \{b_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$a) \quad \text{Si } \{b_i\}_{i=1}^k \text{ son li}$$

$$\Rightarrow \{Ab_i\}_{i=1}^k \text{ son li}$$

Sol

no se cumple, basta tomarse

$$A = 0 \Rightarrow \{Ab_i\}_{i=1}^k = \{0\} \text{ el cual}$$

no es li.

Obs

Si $m=n$ podemos pedir

A invertible y ahí se tiene

Si $\{b_i\}_{i=1}^k$ $\Rightarrow \{Ab_i\}_{i=1}^k$ son li
son li

b) Si $\{Ab_i\}_{i=1}^k$ son li

$\Rightarrow \{b_i\}_{i=1}^k$ son li

Sol

esto es verdad matemáticamente.

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i b_i = 0$$

$$\Rightarrow A \cdot \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i b_i \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i (Ab_i) = 0 \Rightarrow \{Ab_i\} \text{ li}$$

16-10-2018 Som 11//

P3]

Sea $m \in \mathbb{N}$ d.o., Definimos

$$W = \{ p \in P_m \mid p(1) = 0 \}$$

a) Demuestre que W es sub
de P_m

Sol

Por la caracterización

• $W \neq \emptyset$

$$p \equiv 0 \quad [p(x) = 0 \quad \forall x]$$

$$\text{es t.q. } p(1) = 0$$

$$\Rightarrow p \in W \quad \therefore W \neq \emptyset$$

• $\forall p, q \in W, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda p + q \in W$

Sea $p, q \in W$ y $\lambda \in \mathbb{R}$
notemos

$$\begin{aligned}(\lambda p + q)(1) &= \lambda p(1) + q(1) \quad / \text{ por def} \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 \quad / p, q \in W \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda p + q \in W$$

$\therefore W \subseteq \text{se } V //$

b) De una base de W y
calcule su dimensión

Sol

$$\text{Sea } p \in W \Rightarrow p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

ahora necesitamos $p(1) = 0$

$$\text{es decir } \sum_{k=0}^m a_k = 0$$

$$\text{así } a_0 = - \sum_{k=1}^m a_k$$

$$\text{luego } p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^m a_k x^k$$

$$\Rightarrow p(x) = - \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^m a_k x^k$$

$$= \sum_{k=1}^m a_k (x^k - 1)$$

$\therefore \{x^k - 1\}_{k=1}^m$ es un generador

veamos si son li

$$\sum_{k=1}^m a_k (x^k - 1) = 0$$

$$\Rightarrow - \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^m a_k x^k = 0$$

$$\text{Si renombramos } a_0 = - \sum_{k=1}^m a_k$$

$\Rightarrow$ estamos pidiendo

$$\sum_{k=0}^m a_k x^k = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k$$

$\downarrow$

Por igualdad polinomial

$$\Rightarrow a_k = 0 \quad k \in \{1, \dots, m\}$$

$$-\sum_{k=1}^m a_k = 0$$

$$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k$$

son li

we no son base

$$\therefore \dim(W) \leq m$$

8) Complete la base de W a
una base de P_m

Sol

Sabemos $\dim(P_m) = m+1$

$\therefore$ hay que agregar un vector

propongo agregar $\{1\}$

luego veamos si $\{x^k - 1\}_{k=1}^m \cup \{1\}$

son li es decir

$$\sum_{k=1}^m a_k (x^k - 1) + a \cdot 1 = 0$$

$$\rightarrow a - \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^m a_k x^k = 0$$

$$\text{Sea } a_0 = a - \sum_{k=1}^m a_k, \text{ luego}$$

$$a_0 + \sum_{k=1}^m a_k x^k = 0$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^m a_k x^k = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k$$

$$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

$$a = \sum_{k=1}^m a_k^0 = 0$$

$$\Rightarrow a_k = 0 \quad \forall k \quad \text{y} \quad a = 0$$

∴ Son $m+1$ vectores

el espacio tiene dimensión

$m+1$ ∴ son base

P4

a) sea v un e v sobre un cierto cuerpo K . Considere $\{u_i g_{i=1}^m \subseteq U$ y $v \notin \langle \{u_i g_{i=1}^m \rangle$. muestre que

$$v + u_1 + \dots + u_m \notin \langle \{u_i g_{i=1}^m \rangle$$

sol

Supongamos que si

$$\Rightarrow v + u_1 + \dots + u_m \in \langle \{u_i g_{i=1}^m \rangle$$

ademas notamos

$$u_1 + \dots + u_m \in \langle \{u_i g_{i=1}^m \rangle$$

$$\Rightarrow (v + u_1 + \dots + u_m) - (u_1 + \dots + u_m) \in \langle \{u_i g_{i=1}^m \rangle$$

$$\Rightarrow v \in \langle \{u_i g_{i=1}^m \rangle \rightarrow \text{Contradicción} //$$

b)

considere los siguientes

se de $M_{3,3}(\mathbb{R})$

$$V_1 = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \mid A \text{ es simétrica}\}$$

$$V_2 = \{A \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \mid A \text{ es triangular superior}\}$$

1) Encuentre una base y la dimensión de $V_1 \cap V_2$.

sol

Sea $A \in V_1 \cap V_2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad A \in V_1 \Rightarrow A = A^T$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\therefore b = d, g = c, h = f.$$

luego

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

a ha n a $A \in V_2 \therefore b = c = f = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

que generan V_2 son li por

ser subconjunto de la

base canónica,

Obs: Todo subconjunto de

vectores li es li

$$\text{luego } \dim(V_1 \cap V_2) = 3$$

2) muestre que $M_{33}(\mathbb{R}) = V_1 + V_2$
Sol

$$\text{Sea } A \in M_{33}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & d & g \\ d & 0 & h \\ g & h & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b-d & c-g \\ 0 & e & f-g \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$\in V_1$ $\in V_2$

$$\therefore M_{33} = V_1 + V_2 //$$

3) Muestre un elemento de $M_{33}(\mathbb{R})$ que se escriba al menos de tres maneras diferentes como elementos de $V_1 + V_2$. Explique por qué esto es posible

Sol

matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\in V_1 \\ \in V_2}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} //$$

lo anterior es posible

Por que $\dim(V_1 \cap V_2) = 3$

$\Rightarrow V_1$ y V_2 no son sumadirecta
la descomposición no es
única //

P5

sea V un sub de $\mathbb{R}^n$, para $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$

definimos $A(V) = \{Ax \mid x \in V\}$

a)

1) pruebe que $A(V)$ es sub de $\mathbb{R}^n$

Sol Por caracterización

$v \in V \Rightarrow 0 \in V$

$\Rightarrow A \cdot 0 = 0 \in A(V) \therefore A(V) \neq \emptyset$

Let $Ax, Ay \in A(V), \lambda \in \mathbb{R}$

~~Let~~ $\lambda Ax + Ay \in A(V)$

$$\Rightarrow \lambda Ax + Ay$$

$$\begin{aligned} &= A[\lambda x + y] \\ &= Av \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} x, y \in V \\ \Rightarrow \lambda x + y \in V \\ \forall \lambda \forall x \forall y \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \lambda [Ax] + Ay \in A(V) //$$

$$\therefore A(V) \subseteq \text{set} //$$

2) Sean V, W subespacios de $\mathbb{R}^n$

T.q. $V \oplus W = \mathbb{R}^n$, pruebe

que si $A \in M_{n,n}$ invertible

$$\Rightarrow A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$$

Sol

1 - veamos $A(V) \cap A(W) = \{0\}$

Sea $y \in [A(V) \cap A(W)]$

$$\Rightarrow y = Av = Aw, \quad \begin{matrix} v \in V \\ w \in W \end{matrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}[Av] = A^{-1}[Aw]$$

$$\Rightarrow v = w \Rightarrow v \in V \cap W$$

$\Rightarrow v = 0$ $\left\{ \begin{array}{l} V, W \text{ son} \\ \text{suma} \\ \text{directa} \end{array} \right.$

$$\Rightarrow Y = A \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow A(V) \cap A(W) = \{0\}$$

$$\supseteq A(V) + A(W) = \mathbb{R}^3$$

$$\text{Let } Y \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow A^{-1}Y \in \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow A^{-1}Y = V + W, \exists W \in W, V \in V$$

$\text{and } W \oplus V = \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow A \cdot [A^{-1}Y] = AV + AW$$

$$\Rightarrow Y = AV + AW$$

$$\Rightarrow Y \in A(V) + A(W)$$

$$\therefore A(V) + A(W) = \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^3$$

- p. 27
 teo



si V, W son sev de Z

$$Z = V \oplus W \text{ si } \begin{cases} 1 - V \cap W = \{0\} \\ 2 - Z = V + W \end{cases}$$

3) Sean V, W sev de $\mathbb{R}^n$ t.q

$$V \oplus W = \mathbb{R}^n. \text{ pruebe que}$$

$$\text{si } A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow A \text{ es invertible}$$

Indicación

pruebe que

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ t.q.}$$

$$Ax = z$$

Obs

Utilizaremos el siguiente
resultado

A invertible

ssi

$\forall b \in \mathbb{R}^m \quad Ax = b$ tiene solución

ssi

$\forall b \in \mathbb{R}^m \quad Ax = b$ tiene solución
única

ssi

$Ax = 0$ tiene solución
única

we go

$$\exists z \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \exists! y \in A(V)$$

$$\exists! y_2 \in A(W)$$

+ y

$$z = y_1 + y_2$$

$$= Av_1 + Aw_2$$

$$= A[v_1 + w_2]$$

$$= Ax \quad / \quad x = v_1 + w_2 \in \mathbb{R}^n$$

$$\forall z \in \mathbb{R}^n \exists x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } Ax = z$$

$$\Rightarrow A \text{ is invertible}$$

Obs para el resultado anterior
basta pedir

$$V, W \subseteq V \text{ de } \mathbb{R}^n \text{ y } A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$$

b)

1) Sea W un $\subseteq V$ de $\mathbb{R}^n$

de $\mathbb{R}^n$ eliminamos

$$E = \{A \in M_{n,n} \mid A(\mathbb{R}^n) \subseteq W\}$$

Muestre que E es un $\subseteq V$
de $M_{n,n}$

Sol

usamos la caracterización

$$1 - \underline{E \neq \emptyset}$$

$$\text{si } A = 0$$

$$O(\mathbb{R}^n) = \{ 0x \mid x \in \mathbb{R}^n \}$$

$$= \{ 0 \} \subseteq W \quad \checkmark$$

$$\forall \alpha \quad W \subseteq V \quad \cdot \quad 0 \in E \Rightarrow E \neq \emptyset$$

$$2 - \forall A, B \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda A + B \in E$$

es decir

$$[\lambda A + B](\mathbb{R}^n) \subseteq W$$

$$\text{sea } Y \in [\lambda A + B](\mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n \quad \text{t.q.} \quad Y = [\lambda A + B]x$$

$$\Rightarrow Y = \lambda(Ax) + Bx$$

$$\text{We have } \left. \begin{array}{l} AX \in A(\mathbb{R}^n) \Rightarrow AX \in W \\ BX \in B(\mathbb{R}^n) \Rightarrow BX \in W \end{array} \right\} A, B \in E$$

$$\Rightarrow \wedge AX + BX \in W \text{ for all } X$$

$$\Rightarrow Y \in W$$

$$\therefore [\wedge A + B](\mathbb{R}^n) \subseteq W$$

$$\Rightarrow \wedge A + B \in E$$

$$\therefore E \text{ is } \text{sub} //$$

2) Sea $W = \{(\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

calcule la dimensión de

$$E = \{A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid A(\mathbb{R}^2) \subseteq W\}$$

Es decir sea $A \in E$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ luego } \forall x, y \in \mathbb{R}, \exists \lambda$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

es decir $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R} + 0$

$$ax + by = \lambda$$

$$cx + dy = \lambda$$

em particular

$$x=0, y=1$$

$$\Rightarrow b = \lambda^*$$

$$d = \lambda^*$$

$$\Rightarrow b = d$$

Y particular

$$x=1, y=0$$

$$a = \bar{\lambda}^*$$

$$\Rightarrow a = c$$

$$c = \bar{\lambda}^*$$

$$\text{and } A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$$

luego

$$Ax = \begin{pmatrix} ax + by \\ ax + by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$\therefore A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una descomposición

luego

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Generan E y son li. Por:

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 0$$

así, generand $\{0\}$ son li. $\therefore$ son
base del espacio

$$\Rightarrow \dim(E) = 2 //$$

P_2

$$\text{sean } U = \{ p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(-x) = p(x) \forall x \}$$

$$V = \{ p \in P_2(\mathbb{R}) \mid p(x) = -p(-x) \forall x \}$$

a) pruebe que U, V son sev de P_2

sol)

Por la caracterización, para U

$$p(x) = 0 \quad \forall x \text{ es } + \text{ y } - \quad p(-x) = p(x)$$

$$\therefore 0 \in U \Rightarrow U \neq \emptyset$$

luego falta ver que

$$\forall p, q \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda p + q \in U$$

$$\begin{aligned}
 [1p+q](x) &= 1p(x) + q(x) \quad / 0 \in F \\
 &= 1p(-x) + q(-x) \quad / p, q \in U \\
 &= [1p+q](-x) \quad \forall x
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1p+q \in U // \Rightarrow U \text{ est } \text{Sok}$$

Propa V

$$\bullet p(x) = 0 \text{ est } q$$

$$p(x) = -p(-x) \therefore 0 \in V$$

$$\Rightarrow V \neq \emptyset$$

$$\bullet \forall p, q \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda p + q \in V$$

$$[\lambda p + q](x) = \lambda p(x) + q(x) \quad / 0 \in F$$

$$= 1[-p(-x) + (-q(-x))] \quad / \quad q, p \in V$$

$$= -[1p(-x) + q(-x)]$$

$$= -[1p + q](-x)$$

$$\Rightarrow 1p + q \in V$$

$$\therefore \forall p, q \in V //$$

b) Muestre que $B = \{1+x^2, 1-x^2\}$ es una base de U , veamos que genera

$$\text{Sea } p \in U \rightarrow p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow p(x) = p(-x)$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c$$

$$\Rightarrow 2bx = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow b=0 \quad \therefore$$

$$p(x) = ax^2 + c$$

$$= \alpha(x^2 + 1) + \beta(1 - x^2)$$

↓
дано.

$$ax^2 + c = \alpha x^2 + \alpha + \beta - \beta x^2$$

$$\rightarrow 0 = [\alpha - \beta - a]x^2 + \alpha + \beta - c$$

$$\rightarrow \alpha - \beta - a = 0 \rightarrow \alpha - \beta = a$$

$$\alpha + \beta - c = 0 \quad \alpha + \beta = c$$

$$\rightarrow \alpha = \frac{a+c}{2}, \quad \beta = \frac{c-a}{2}$$

$$\therefore P(x) = \frac{a+b}{2}(x^2+1) + \frac{(b-a)}{2}(1-x^2)$$

Logo Bases

veamos que son li

$$a(1+x^2) + b(1-x^2) = 0$$

$$a + ax^2 + b - bx^2 = 0$$

$$(a-b)x^2 + a + b = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a-b=0 \\ a+b=0 \end{matrix} \Rightarrow a=b=0 //$$

$\therefore$ Son linearmente
base.

c). encuentre una base de V y determine su dimensión

Sol

$$\text{Sea } p \in V \Rightarrow p(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\rightarrow ax^2 + bx + c = -a(x^2) + b(x) - c$$

$$\rightarrow 2ax^2 + 2c = 0$$

$$\Rightarrow ax^2 + c = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow c = 0 = -a$$

$$\therefore p(x) = bx$$

luego $\{x\}$ genera V es

li. $\therefore$ es base $\Rightarrow \dim(V) = 1$

a) pruebe que $P_2 = U + V$

Sea $P \in P_2$

$$\Rightarrow P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= \underbrace{ax^2 + c}_{\in U} + bx \in V$$

$$\Rightarrow U + V = P_2 //$$

e) determine si $U + V$ es
suma directa

sa): recordamos

$$U \oplus V = P_2 \text{ si } U + V = P_2 \text{ y } V \cap U = \{0\}$$

vea si basta ver $V \cap U = \{0\}$

Sea $P \in U \cap V$

$$\Rightarrow p \in V \Rightarrow p(x) = bx$$

$$p \in L \Rightarrow p(-x) = p(0)$$

$$\Rightarrow -bx = b \cdot 0$$

$$\Rightarrow 2bx = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow b = 0$$

$$\therefore p = 0$$

$$\Rightarrow u \perp v = 206 //$$

$$\therefore u + v \text{ es } \underline{\text{sumadireta}} //$$

P7)

a) muestre que

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \text{ y } F = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$$

son sub de $\mathbb{R}^n$

sol

por la caracterización

$$0 \in N \text{ por } A \cdot 0 = 0 \Rightarrow N \neq \emptyset$$

sean $x, y \in N, \lambda \in \mathbb{R}$ por $\lambda x + y \in N$
 $\hookrightarrow$ por. matrices

$$\begin{aligned} A[\lambda x + y] &= \lambda Ax + Ay \\ &= \lambda \cdot 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} x, y \in N$$

$$\Rightarrow \lambda x + y \in N \therefore N \text{ es sub}$$

$$\bullet \underline{F \neq \emptyset}$$

$$0 = A \cdot 0 \therefore$$

$$y = 0, \exists x (x \neq 0) \text{ t. q. } Ax = 0$$

$$\Rightarrow y \in F \therefore F \neq \emptyset$$

$$\bullet a, b \in F, \lambda \in \mathbb{R} \text{ p.d. q. } \lambda a + b \in F$$

$$\lambda a + b = \lambda [Ax] + [Ay] / a, b \in F$$

$$= A[\lambda x + y] \quad (\text{prop. matrices})$$

$$\Rightarrow \text{para } \lambda a + b, \exists \bar{x} \text{ t. q. } A\bar{x} = \lambda a + b$$

$$\text{basta tomar } \bar{x} = \lambda x + y$$

$$\therefore \lambda a + b \in F \Rightarrow F \text{ es sub}$$

Supongamos A es invertible

Muestre que si $\{u_1, \dots, u_m\}$ son
base de $\mathbb{R}^m \Rightarrow \{Au_i\}_{i=1}^m$ tmb son
base

Sol)

basta ver que son li
por teo que dice

$\dim(V) = n, \{v_i\}_{i=1}^n \text{ li} \Rightarrow \{v_i\}_{i=1}^n \text{ son}$
base

Ver,

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i [Au_i] = 0$$

$$\Rightarrow A \left[\sum_{i=1}^m \alpha_i u_i \right] = 0$$

A es invertible

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

} son base
↳ $\Rightarrow$ son li

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

$\therefore \{Av_i\}_{i=1}^n$ son li

luego son base //

c) - sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un entero

positivo l t. q $A^{l-1}x_0 \neq 0$

$$\text{y } A^l x_0 = 0$$

pd q $\{x_0, Ax_0, \dots, A^{l-1}x_0\}$ es li

Sol

Estudiamos

$$\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i A^i x_0 = 0$$

$$\rightarrow A^m \cdot \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i A^i x_0 = 0 \quad \text{con } m \in \{1, \dots, l-1\}$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{l-1} \alpha_i A^{m+i} x_0 = 0, \text{ pues } 0 \leq i$$

$$m+i \geq l$$

$$\Rightarrow A^{m+i} x_0 = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=0}^{l-m-1} \alpha_i A^{m+i} x_0 = 0$$

$$\forall m \in \{1, \dots, l-1\}$$

Sea $m = l-1$

$$\rightarrow \alpha_0 \underbrace{A^{l-1}}_{\neq 0} x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = 0$$

$$\forall n \geq 0 \quad \alpha_0 = 0 \quad \forall$$

$$\sum_{i=1}^{l-n-1} \alpha_i A^{n+i} x_0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow l-2$$

$$\text{Si } n = l-2 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

↓ inductivamente

$$\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l-2$$

$$\text{basta ver } \alpha_{l-1}$$

alora originalmente

$$\sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i A^i x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{l-1} \underbrace{A^{l-1} x_0}_{\neq 0} = 0$$

Todos son
cero salvo $l-1$
que
será no

$$\Rightarrow \alpha_{l-1} = 0 \quad \therefore \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

$\Rightarrow$ so m li //

P81

a) sea $h^T = (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad W_h = \{M \in M_{3,3} \mid Mh = 0\}$

1) Demuestre que W_h es subde
 $M_{3,3}(\mathbb{R})$

sol

$$0 \in W_h, \quad 0 \cdot h = 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow W_h \neq \emptyset$$

sea $A, B \in W_h, \lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{p.d.} \quad \lambda A + B \in W_h$$

$$\begin{aligned} [\lambda A + B]h &= \lambda Ah + Bh \\ &\stackrel{A, B \in W_h}{=} \lambda \cdot 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda A + B \in W_h // \therefore \text{es sub} //$$

2) encuentre una base para W

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow a + b + c = 0$$

$$d + e + f = 0$$

$$g + h + i = 0$$

$$\rightarrow a = -b - c$$

$$d = -e - f$$

$$g = -h - i$$

$$\therefore M = \begin{pmatrix} -b-c & b & c \\ -e-f & e & f \\ -g-i & g & i \end{pmatrix}$$

$$= b \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∴ un generador es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

luego basta ver que es li

$$a \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -a & -b & a & b \\ -c & -d & c & d \\ -e & -f & e & f \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c = d = e = f = 0$$

$$-a - b = -c - d = -e - f = 0$$

$$\Rightarrow a = b = c = d = e = f = 0$$

Son // son base

3) calcule $\dim(W_h)$

Por lo tanto $\dim(W_h) = 6$

4) Complete la base

de W_h obtenida en (2)
a una base de $M_{3,3}(\mathbb{R})$

Sol

$$\text{Como } \dim(M_{3,3}) = 9$$

basta, para 3 vectores

$$\text{por ejemplo } \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ porque no}$$

son linealmente independientes las columnas
finales. luego

$$a \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ d \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$+ g \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a-b+g & a & b \\ -c-d+h & c & d \\ -e-f+i & e & f \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a=b=c=d=e=f=0$$

$$-a-b+g=0$$

$$-c-d+h=0$$

$$-e-f+i=0$$

$$\Rightarrow a=b=c=d=e=f=g=h=i=0$$

son //

son base P y T eo. //

b) se define $U = \{v \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m v_i = 0\}$

encuentre una base y de su dimension

$$v_1 = -\sum_{i=2}^m v_i$$

$$\Rightarrow v = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^m v_i \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} = \sum_{i=2}^m v_i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ en la posición } i \text{ es } i-1.$$

entonces $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 generan $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$

luego es trivioso.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

buscamos

$$\sum_{i=1}^{n-1} -\alpha_i = 0 \quad \text{y} \quad \mathbb{I} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$$

$\therefore$ son 0 generan 0 no base

$$\text{luego } \dim(U) = n-1$$

Pq $A \in M_{n,n}$

A es invertible $\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}^n$ $Ax = y$
tiene solución

$\Rightarrow$ basta tomar $x = A^{-1}y$

$\subseteq$ Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ base canónica
de $\mathbb{R}^n$ luego $\exists x_i \{x_i\}_{i=1}^n \neq 0$

$Ax_i = e_i$ es decir

$$A \cdot [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n]$$

$$A \cdot B = I$$

$\text{Iveso } A \cdot B = I \Rightarrow B = A^{-1}$
 $\downarrow$
 prop

$\therefore A$ es invertible //

Problema

$$x + 2y + (\alpha - 1)z = 0$$

$$2x + (1 - \alpha)y + z = \beta$$

$$(\alpha + 1)x - 4y + z = \gamma$$

a) Encuentre las condiciones

Sobre α, β y γ

1- exista solución única

2- existan infinitas soluciones

Sol

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha - 1 \\ 2 & 1 - \alpha & 1 \\ \alpha + 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

luego escalonamos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha-1 & 0 \\ 2 & 1-\alpha & 1 & \beta \\ \alpha+1 & -4 & 1 & \gamma \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} F_2' = F_2 - 2F_1 \\ F_3' = F_3 - (\alpha+1)F_1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & -3-\alpha & -2\alpha+3 & \beta \\ 0 & -2\alpha-6 & 2-\alpha^2 & \gamma \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} F_3' = F_3 - 2F_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \alpha-1 & 0 \\ 0 & -3-\alpha & -2\alpha+3 & \beta \\ 0 & 0 & -\alpha^2+4\alpha-4 & \gamma-2\beta \end{array} \right)$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-1 & | & 0 \\ 0 & -\alpha-3 & -2\alpha+3 & | & \beta \\ 0 & 0 & -(\alpha-2)^2 & | & \gamma-2\beta \end{pmatrix}$$

luego $\alpha \neq 2$ y $\alpha \neq -3$ generan
solución única.

Si $\alpha = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -5 & -1 & | & \beta \\ 0 & 0 & 0 & | & \gamma-2\beta \end{pmatrix}$$

$\therefore \gamma = 2\beta$ y $\alpha = 2$ generan
infinitas soluciones.

Si $\alpha = -3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 9 & | & \beta \\ 0 & 0 & -25 & | & \gamma-2\beta \end{pmatrix}$$

luego pedimos que

$$\alpha z = \beta \wedge -25z = 8 - 2\beta$$

$$\Rightarrow \frac{\beta}{9} = \frac{8 - 2\beta}{-25}$$

$$\Rightarrow -25\beta = 9(8 - 2\beta)$$

$$\Rightarrow -25\beta = 72 - 18\beta$$

$$\Rightarrow 8\beta = -72$$

$$\therefore \alpha = -3, \quad z = -\frac{7}{9}\beta$$

Generación finita
soluciones.

b) Si tomamos $\alpha = 7$

1- notamos que A es la matriz asociada al sistema

2- $\alpha = 7$ el sistema tiene solución única

esto quiere decir que

no hay ceros en la matriz escalonada

$\therefore A$ es invertible //