MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar Extra C1

P1. ***C5 P3 - Algebra 2002***

Sea $M_{2,2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los siguientes sub conjuntos de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\} \; W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | \; Traza(A) = 0\}$$

a) Demuestre que W_1 es un sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

b) Demuestre que W_2 es un sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

c) Encuentre una base de W_1 y de su dimensión

d) Exitenda la base de W_1 a una base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

e) Encuentre una base de W_2 y de su dimensión

f) Extienda la base de W_2 a una base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

g) Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$ y de su dimensión

h) Dé la dimensión de $W_1 + W_2$

P2. Pruebe o muestre un contrajemplo a la siguientes afirmaciones. Para eso considere $A \in \mathcal{M}_{mn}$ y $\{b_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathbb{R}^n$

a) Si $\{b_i\}_{i=1}^k$ son li entonces $\{Ab_i\}_{i=1}^k$ son li

b) Si $\{Ab_i\}_{i=1}^k$ son li entonces $\{b_i\}_{i=1}^k$ son li.

P3. ***C2 P2 - Lineal 2016 - 2***

Sea $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$. Definimos $W = \{p \in P_m | p(1) = 0\}$

a) Demuestre que W es un sev de P_m

b) De una base de W y calcule su dimensión

c) Complete la base de W a una base de P_m

P4. ***C2 P2 - Lineal 2017 - 3***

a) Sea U un ev sobre un cierto cuerpo K. Considere $\{u_i\}_{i=1}^n \subseteq U$ y $v \notin \langle \{u_i\}_{i=1}^n \rangle$.
Muestre que $v + u_1 + ... + u_n \notin \langle \{u_i\}_{i=1}^n \rangle$

b) Considere los siguientes sev de $M_{33}(\mathbb{R})$. $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) | A \text{ es simetrica}\}$
$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) | A \text{ es triangular superior}\}$

1) Encuentre una base y la dimensión de $V_1 \cap V_2$

2) Muestre que $M_{33}(\mathbb{R}) = V_1 + V_2$

3) Muestre un elemento de $M_{33}(\mathbb{R})$ que se escriba al menos de tres maneras diferentes como elementos de $V_1 + V_2$. Explique porqué esto es posible.

P5. ***C5 P3 - Álgebra 2004***

Sea V un sev de $\mathbb{R}^n$, para $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ definimos:

$$A(V) = \{Ax : x \in V\}$$

a) 1) Pruebe que $A(V)$ es sev de $\mathbb{R}^n$

2) Sean V, W sev de $\mathbb{R}^n$ tal que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{n,n}$ es invertible entonces $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$

3) Sean V, W sev de $\mathbb{R}^n$ tal que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$ entonces A es invertible. **Indicación:** Pruebe que para todo $z \in \mathbb{R}^n$ el sistema $Ax = z$ tiene solución.

b) 1) Sea W un sev de $\mathbb{R}^n$ y definamos $E = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : A(\mathbb{R}^n) \subseteq W\}$. Muestre que E es un sev de $M_{nn}(\mathbb{R})$

2) Sea $W = \{(t,t) : t \in \mathbb{R}\}$. Calcule la dimensión de $E = \{A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) : A(\mathbb{R}^2) \subseteq W\}$

P6. ***C2 P1 - Lineal 2012 - 3***
Sean $U = \{p \in P_2(\mathbb{R}) | p(-x) = p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$ y $V = \{p \in P_2(\mathbb{R}) | p(x) = -p(-x)\}$

a) Pruebe que U y V son sev de P_2

b) Muestre que $B = \{1 + x^2, 1 - x^2\}$ es una base de U

c) Encuentre una base de V y determine su dimensión

d) Pruebe que $P_2 = U + V$

e) Determine si $U + V$ es suma directa

P7. ***C2 P3 - Lineal 2012 - 3***
Sea $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$

a) Muestre que $N = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = 0\}$ y $F = \{y \in \mathbb{R}^n | \exists x \in \mathbb{R}^n, y = Ax\}$ son sev de $\mathbb{R}^n$

b) Suponga que A es invertible. Muestre que si $\{u_1, ..., u_n\}$ son base de $\mathbb{R}^n$ entonces $\{Au_i\}_{i=1}^n$ tambien es base de $\mathbb{R}^n$.

c) Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y un entero positivo l tal que $A^{l-1}x_0 \neq 0$ y $A^l x_0 = 0$. Pruebe que $\{x_0, Ax_0, ..., A^{l-1}x_0\}$ es li.

P8. ***C1 P2- Lineal 2011 - 2***

a) Sea $h^t = (1, 1, 1)$ y $W_h = \{M \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R}) | Mh = 0\}$

1) Demuestre que W_h es sev de $M_{33}(\mathbb{R})$
2) Encuentre una base para W_h
3) Calcule $dim(W_h)$
4) Complete la base de W_h obtenida en (2) a una base de $\mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$

b) Se define $U = \{v \in \mathbb{R}^n | \sum_{i=1}^{n} v_i = 0\}$ encuentre una base para U e indique su dimensión.

P9. Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ muestre que se tiene:

$$A \text{ es invertible} \iff \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ el sistema } Ax = y \text{ tiene solución}$$

Indicación: Puede ser util interpretar (de manera conveniente) $AB = I$ como un sistema de ecuaciones con respecto a los valores de B.
Obs: Sabemos que la equivalencia es verdad para cuando existe una única solución, pero en realidad basta que siempre tenga al menos una solución.

P10. ***C1 P1 - Lineal 2017-2***

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & (\alpha-1)z & = & 0 \\ 2x & + & (1-\alpha)y & + & z & = & \beta \\ (\alpha+1)x & - & 4y & + & z & = & \gamma \end{array}$$

a) Encunetre las condiciones sobre los parámetros α, β, γ de modo que el sistema (a) tenga solución única, (b) tenga infinitas soluciones.

b) Considere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \alpha-1 \\ 2 & 1-\alpha & 1 \\ \alpha+1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

y pruebe que para $\alpha = 7$ la matriz A es invertible.