

Aux 7

P11

Sean los siguientes subespacios de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Muestre que son suma directa.

Sol

$$1- M_{2,2} = U + V$$

Sea $M \in M_{2,2}$ p.d. $\exists M_U \in U, M_V \in V$

$$\text{t.q. } M = M_U + M_V$$

$$\text{s: } M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

Quiero cte $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ T. Q

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$\therefore x = a+c$$

$$y = b+d$$

$$z = -b$$

$$w = a$$

$$\text{ luego } d = y - b = y + z$$

$$c = x - a = x - w$$

por ende basta tomarse

$$M_U = \begin{pmatrix} w & -z \\ z & w \end{pmatrix} \in U$$

$$M_V = \begin{pmatrix} x-w & y+z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$$

Para que $M = M_U + M_V$

$$\therefore M_{Z_2} = U + V$$

Para ver que son suma directa basta comprobar $U \cap V = \{0\}$

luego sea $M \in U \cap V$

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \text{ luego } M \in U$$

$$\Rightarrow Z = -Y \quad \wedge \quad X = W$$

$$\therefore M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$$

$$\text{ allora } M \in V$$

$$\Rightarrow -y = x = 0$$

$$\Rightarrow x = y = 0$$

$$\Rightarrow M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\therefore U \cap V \subseteq \{0\}, \text{ como}$$

$$U, V \text{ son } \subseteq V \quad 0 \in U, 0 \in V$$

$$\Rightarrow 0 \in U \cap V$$

$$\Rightarrow \{0\} \subseteq U \cap V \subseteq \{0\} \Rightarrow U \cap V = \{0\}$$

obs: basta probar

$$M \in U \cap V \Rightarrow M = 0$$

luego

$$M_{2,2} = U + V \quad \nabla \quad U \cap V = \{0\}$$

$$\therefore M_{2,2} = U \oplus V$$

↳ suma directa

P₂

Sea $S \subseteq P_3(\mathbb{R})$ un $S \in V$

com base $B = \{x^2 + x + 1, x^3 + x, x^3 + 1\}$

Encontrar $W \subseteq P_3(\mathbb{R})$ t. q.

$$S \oplus W = P_3(\mathbb{R})$$

Sal

$$|B| = 3 \quad \text{luego} \quad \dim(S) = 3$$

Si

$$S \oplus W = P_3(\mathbb{D})$$

$$\Rightarrow \dim(S \cap W) = 0 \quad \vee$$

$$\dim(S) + \dim(W) = \dim(P_3(\mathbb{D})) \\ = 4$$

$$\Rightarrow \dim(W) = 1$$

luego buscamos W

generado por 1 singleton.

luego si encontramos

un vector li a los
anteriores

deberiamos sumar 2 sent. a

$$S \cap W = \{0\}$$

busquemos en

$$\{1, x, x^2, x^3\}$$

intentemos

$$P(x) = 1 \rightarrow W = \{a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

$$1 - S \cap W = \{0\}$$

$$P \in S \cap W$$

$$\rightarrow P(x) = a \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$P \in S \Rightarrow P(x) = b(x^2 + x + 1) + c(x^2 + x) + d(x^3 + 1)$$

$\Rightarrow$

$$a = bx^2 + bx + b + cx^3 + cx + dx^3 + d$$

$$0 = [c+d]x^3 + bx^2 + [b+c]x + b+d-a$$

$$\Rightarrow c+d=0$$

$$b=0$$

$$b+c=0$$

$$b+d-a=0$$

$$\left. \begin{array}{l} c+d=0 \\ b=0 \\ b+c=0 \end{array} \right\} c=b=0$$

$$c=b=0$$

$$\Rightarrow d=0$$

$$\Rightarrow a=0$$

$$\Rightarrow p(x) = 0 \forall x \therefore \{0\} = \text{S.N.W}$$

Veamos que $S+W = P_3(\mathbb{M})$

Sea $P \in P_3(\mathbb{M})$

$$\rightarrow P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

luego

$$S+W = \{ \alpha(x^2+x+1) + \beta(x^3+x) \\ + \gamma(x^3+1) + \delta \cdot 1 \}$$

así buscamos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ t.q

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$= [\beta + \gamma]x^3 + \alpha x^2 + [\alpha + \beta]x \\ + \alpha + \gamma + \delta$$

ivego

$$\beta + \gamma = a \quad (1)$$

$$\alpha = b \quad (2)$$

$$\alpha + \beta = c \quad (3)$$

$$\alpha + \gamma + \delta = d \quad (4)$$

$$(2) \text{ and } (3) \Rightarrow \beta = c - b$$

ivego

$$\gamma = a - \beta = a - c + b$$

ivego

$$\delta = d - \alpha - \gamma$$

$$= d - b - a + c - b$$

$$= d + c - a - 2b$$

as i

$$\begin{aligned} P(x) &= b(x^2 + x + 1) \\ &+ [c-b](x^3 + x) \\ &+ [a-c+b](x^3 + 1) \\ &+ [d+c-a-2b] // \end{aligned}$$

$$\therefore P_3 = S + W, \quad S \cap W = \{0\}$$

$$\Rightarrow P_3 = S \oplus W //$$

P_3 span U, W set t. q

$$\dim(V) = 3 \quad \& \quad \dim(U) = \dim(W) = 2$$

$$\text{com } U \neq W \text{ p.d. q } \dim(U \cap W) = 1$$

Sol

notemos que

$$U \neq W \Rightarrow \exists w \in W \setminus U$$

luego si $\{u_1, u_2\}$ es base de U , el conjunto

$\{u_1, u_2, w\}$ es li por $w \notin U$

luego $\{u_1, u_2, w\}$ es base de V por ser de dimensión

3, esto significa

$$\forall v \in V \exists \alpha, \beta, \gamma \neq 0$$

$$v = \underbrace{\alpha u_1 + \beta u_2}_{\in U} + \gamma w \quad w \in W$$

es decir $U+W=V$

ahora
$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\Rightarrow \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(V)$$

$$= 2 + 2 - 3 = 1$$

$$\Rightarrow \dim(U \cap W) = 1 //$$

Pr Muestre que si S_n es

el conjunto de las matrices simétricas de tamaño

$n \times n$ y AS_n las antisimétricas de tamaño $n \times n$. Demuestre que:

• S_n y $A S_n$ son sev de M_{nn}

Sol

notamos

$$S_n = \{ M \in M_{nn} \mid M^T = M \}$$

luego usamos la caracterización de sev.

$$\bullet S_n \neq \emptyset, \quad 0 \in S_n \text{ por qe } 0^T = 0 \quad \therefore S_n \neq \emptyset$$

• sean $A, B \in S_n, \lambda \in \mathbb{R}$ pd q

$$\lambda A + B \in S_n \text{ i.e. } [\lambda A + B]^T = \lambda A + B$$

$$[\lambda A + B]^T = \lambda A^T + B^T = \lambda A + B \quad \begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \text{Propiedades} & A, B \in S_n \\ \text{Transpuestas} & \end{matrix} //$$

Para $AS_m = \{M \in M_{nn} \mid M^T = -M\}$

1- $AS_m \neq \emptyset$

nota que $0^T = 0 = -0$

$\therefore 0 \in AS_m \rightarrow AS_m \neq \emptyset$

2- $A, B \in AS_m, \lambda \in \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$

$$[\lambda A + B]^T = -[\lambda A + B]$$

$$[\lambda A + B]^T = \lambda A^T + B^T \quad // \text{ propiedades Transpuestas}$$

$$= \lambda [-A] + [-B] \quad // A, B \in AS_m$$

$$= -[\lambda A + B] \quad // \text{ distributividad}$$

$$\Rightarrow \lambda A + B \in AS_m //$$

$$\therefore S_m \text{ y } AS_m \text{ son subV.}$$

Demuestre que

$$M_{n,n} = S_n \oplus AS_n$$

Sol

$$1- M_{n,n} = S_n + AS_n$$

Sea $M \in M_{n,n}$ p.dq

$$\exists A \in S_n, B \in AS_n \text{ T.q.}$$

$$M = A + B$$

ahora en un aux pasado

se vio que $\tilde{M} + \tilde{M}^T \in S_n \forall \tilde{M} \in M_{n,n}$

y que $\tilde{M} - \tilde{M}^T \in AS_n \forall \tilde{M} \in M_{n,n}$

luego proponemos

$$A = \frac{M + M^T}{2}, B = \frac{M - M^T}{2}$$

$A \in S_m$ por S_m skew-simétrico por A
y

$$A+B = \frac{M+M^T}{2} + \frac{M-M^T}{2}$$

$$= M$$

luego $M_{m,m} = S_m + AS_m$

2- $S_m \cap AS_m = \{0\}$

sea $M \in S_m \cap AS_m$

$$\Rightarrow M = M^T \wedge M^T = -M$$

$$\Rightarrow M = -M \Rightarrow 2M = 0 \Rightarrow M = 0$$

$$\therefore S_m \cap AS_m = \{0\}$$

luego $M_{m,m} = S_m \oplus A S_m$

• Concluya que la descomposición es única y exprese su forma

donde

la def de suma directa es

$$V = U \oplus W \text{ si } \forall v \in V, \exists! u \in U, \exists! w \in W \text{ t. a. } v = u + w$$

$$v = u + w$$

luego esto dice que la descomposición es única y el más es

$$\frac{M + M^T}{2} \text{ y } \frac{M - M^T}{2}$$

P51 Sea E un es sobre un
cuerpo K . En $E \times E$

se definen las operaciones
naturales [componente a componente]

Sean los siguientes

$se v$ de $E \times E$.

$$U = \{(u, v) \in E \times E \mid u = v\}$$

$$V = \{(u, v) \in E \times E \mid u = -v\}$$

a) pruebe que $E \times E = U \oplus V$.

Sal

notemos primero que

$$U = \{(u, v) \mid u \in E\} \text{ y que}$$

$$V = \{ (u, -u) \mid u \in E \}$$

luego veamos que

$$E \times E = U \cup V$$

Sea $(a, b) \in E \times E$

queremos que

$$\begin{aligned} (a, b) &= (u, u) + (v, -v) \\ &= (u+v, u-v) \end{aligned}$$

$$\text{luego } a = u+v$$

$$b = u-v$$

$$\rightarrow 2 \cdot u = a+b$$

$$\rightarrow u = \frac{1}{2}(a+b)$$

2

$$v = a - u = a - \frac{a+b}{2} \\ = \frac{a-b}{2}$$

luego

$$(a, b) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \right) + \left(\frac{a-b}{2}, -\frac{a-b}{2} \right)$$

$$E \times E = U + V$$

ahora veamos que

$$U \cap V = \emptyset$$

$$\text{sea } (a, b) \in U \cap V$$

$$\Rightarrow (a, b) \in U \text{ luego } a = b$$

$$\Rightarrow (a, a) \in V$$

$$\Rightarrow a = -a$$

$$\Rightarrow 2a = 0$$

$$\Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow (0, 0) = (a, b)$$

$$\therefore (a, b) \in U \cap V \Rightarrow (a, b) = 0$$

$$\Rightarrow U \cap V = \{0\}$$

$$\text{Hence } E \times E = U \oplus V //$$

b) si $\dim(E) = n$
calcule $\dim(U)$, $\dim(V)$ y
 $\dim(E \times E)$

8a)

Sea $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ base de E

Pero como que

$\{(e_1, e_1), (e_1, e_2), \dots, (e_n, e_n)\}$ es
base de V

1) Son li por ser en E
luego falta ver que generan

$$\text{Sea } (a, b) \in U \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow (a, a) \text{ luego } a \in E$$

$$\therefore a = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$$

$$\Rightarrow (a, a) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n (\alpha_i e_i, \alpha_i e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i (e_i, e_i)$$

luego $\{ (e_i, e_i) \}_{i=1}^n$ generan

Segm 1) $\therefore$ Son n' base

Se puede realizar el mismo
argumento para V con
el conjunto $\{e_i, -e_i\}_{i=1}^n$

Y también es base

luego

$$\dim(U) = \dim(V) = n$$

ahora

$$\dim(U \times V) = \dim(U) + \dim(V)$$

↓
Por ser suma directa

$$\Rightarrow \dim(U \times V) = 2n //$$

P6) Sea $m = 2n, n > 0$.

Se define el $S_e V$

$$V = \{ p \in P_m(\mathbb{R}) : \forall i \in \{0 \rightarrow m\} a_i = a_{m-i} \}$$

a) Encontrar una base de V y deduzca que su dimensión es $n+1$

Sol

$$p \in V \Rightarrow p(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{2m} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n + \sum_{i=n+1}^{2m} a_i x^i$$

Observamos $a_i = a_{m-i} \quad \forall i$

Si $i = n$, $m - n = 2n - n = n$

luego $a_n = a_n$ no hay info

Sobre a_m 16790

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n + \sum_{i=n+1}^{2m} a_{2m-i} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n + \sum_{i=1}^m a_{n-i} x^{i+n}$$

$a_{n-1} x^{n+1}$
 $a_{n-2} x^{n+2}$
 $\vdots$
 $a_0 x^{2m}$

} cambiamos
 o ordem
 soma

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + a_n x^n + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{2m-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x^i + x^{2m-i}) + a_n x^n$$

16790

$\{1 + x^{2m}, x + x^{2m-1}, x^2 + x^{2m-2}, \dots, x^n\}$
 e) um gerador

es mas sombase por

que $\{x^i\}_{i=0}^{2n}$ sombase

o sea pedimos que

$$\sum_{i=0}^{2n} a_i x^i = 0 \quad \text{y} \quad a_i = a_{n-i} \quad \forall i$$

lo cual es compatible con
todos nulos //

$\therefore$ la dimension es $n+1$

[entre $\{0, n-1\}$ haya $\{x^i\}$ hay
 $n+1$] //

b) Probamos que $P_m(\mathbb{R}) = V \oplus P_{m-1}$

$$1) V + P_{m-1} = P_m(\mathbb{R})$$

Sea $p \in P_m$ luego

$$p(x) = \sum_{i=0}^{2m} \alpha_i x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x^i + x^{2m-i}) + a_m x^m$$

quiere,

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i$$

luego

$$\alpha_i = a_i + b_i \quad \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$$

$$\alpha_m = a_m$$

$$\alpha_i = a_{2m-i} \quad \forall i \in \{m+1, \dots, 2m\}$$

es decir $\alpha_m = \beta_m$

$$b_i = \alpha_i - a_i \quad \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$$

$$\alpha_i = a_{2m-i} \quad \forall i \in \{m+1, \dots, 2m\}$$

↓

$$a_i = \alpha_{2m-i} \quad \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$$

luego

$$b_i = \alpha_i - \alpha_{2m-i}$$

es decir a_i, b_i están

determinados luego

suman //

veamos que

$$\forall \cap P_{n-1} = \emptyset$$

$$\text{sea } p \in \forall \cap P_{n-1}$$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i (x^i + x^{2n-i}) + a_n x^n$$

$$p \in P_{n-1}$$

$$\Rightarrow P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{2n-i} + a_n x^n$$

$$\Rightarrow b_i = a_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (1)$$

$$0 = a_n \quad (2)$$

$$0 = a_i \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \quad (3)$$

donde (1) es $P \cap X^i$

(2) es $P \cap X^n$

(3) es $P \cap X^{2n-1}$

luego $P \equiv 0$

$$\Rightarrow V \cap P_{n-1} = \{0\}$$

$$\therefore P_n = V \oplus P_{n-1} //$$

c) se define

$$V' = \{ p \in P_m(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \{0, \dots, m\} \\ a_i = -a_{m-i} \}$$

Probar $P_m(\mathbb{R}) = V \oplus V'$
asuma (V es sub)

Sol

Análogo a V'' encontramos que

$$p \in V', \quad p(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x^i - x^{2m-i}) + a_m x^m$$

pero notamos que $a_m = -a_{2m-m} = -a_m$

$$\Rightarrow a_m = 0 \text{ luego}$$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x^i - x^{2m-i})$$

veamos que suman

$$P \in P_m \Rightarrow P(x) = \sum_{i=0}^{2m} \alpha_i x^i$$

quiero que

$$\sum_{i=0}^{2m} \alpha_i x^i = \sum_{i=0}^{m-1} a_i (x^i + x^{2m-i}) + a_m x^m + \sum_{i=0}^{m-1} b_i (x^i - x^{2m-i})$$

luego

$$\alpha_i = a_i + b_i \quad \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$$

$$\alpha_m = a_m$$

$$\alpha_{2m-i} = a_i - b_i \quad \forall i \in \{0, \dots, m-1\}$$

$$\text{luego } a_i = \frac{\alpha_i + \alpha_{2m-i}}{2}$$

$$\sum b_i = \frac{a_i - a_{n-i}}{2}$$

So m summa.

reamos give

$$V \cap V' = \emptyset$$

Seq p & V \cap V'

$$\Rightarrow a_i = a_{n-i} \quad \forall i \quad (V)$$

$$a_i = -a_{n-i} \quad \forall i \quad (V')$$

$$\Rightarrow 2a_i = 0 \Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i$$

$$\therefore p \equiv 0 \Rightarrow V \cap V' = \emptyset //$$

luego $P_m = V \oplus V^\perp //$

P7] sea V un ev sobre K .
 $\dim(V) = n \geq 1$ y $T \subseteq V$
 de dimensión $n-1$

a) probar que $\forall v \in V$

$$T \oplus \langle v \rangle = V$$

sol]

1) suma $T + \langle v \rangle = V$

sea $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$ una base de T

Como $v \notin T \Rightarrow v \notin \{x_i\}_{i=1}^{n-1}$

luego $\{x_i\}_{i=1}^{n-1} \cup \{v\}$ es una base
 de V , esto por v no ser combinación
 lineal de $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$

Demóstrate:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \beta v = 0 \quad \text{si } \beta = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$$

↓
por ser base

luego $\{x_i\}_{i=1}^{n-1} \cup v$ es una base

si $\beta \neq 0$

$$\Rightarrow v = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

$\Rightarrow v \in T \rightarrow \text{no}$

Logo $\{x_i\}_{i=1}^{n-1} \cup \{v\}$ son un
conjunto li de tamaño
 n . Son base logo

$$x \in V$$

$$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i + \beta v$$

$$\in x$$

$$\in \langle x_i \rangle$$

$$\therefore V = T + \langle x_i \rangle$$

ahora veamos

$$T \cap \langle x_i \rangle = \{0\}$$

$$\text{sea } x \in T \cap \langle x_i \rangle$$

$$\Rightarrow x \in \langle x_i \rangle$$

$$\Rightarrow x = \alpha v \quad \text{si } \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\alpha} = v$$

$$\text{ahora } x \in T$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\alpha} \in T$$

$$\Rightarrow v \in T \rightarrow \leftarrow$$

$$\text{si } \alpha = 0$$

$$\therefore x = 0$$

$$\Rightarrow \forall \langle \alpha v \rangle = \{0\}$$

$$\therefore \bigoplus \langle \alpha v \rangle = V \quad \forall v \in T$$

b) sea un subespacio V .

$$+ \text{ y } S \not\subseteq T \Rightarrow S + T = V$$

Calcule la dimensión
de $S + T$ en función de
la dimensión de S .

Sol

$$S \not\subseteq T \quad \dots \quad \exists v \in S \setminus T$$

$\Rightarrow$ por (a)

$$T \oplus \langle v \rangle = V$$

ya que $\langle v \rangle$ es subespacio

$$\therefore T + S = V$$

hasta tomar se el n e s de
componentes cero $\oplus$

$$\Rightarrow \dim(V) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$$

$$\Rightarrow n = \dim(S) + n - 1 - \dim(S \cap T)$$

$$\Rightarrow \dim(S \cap T) = \dim(S) - 1 //$$

P8]

Sea V un ev y U un subde V

$T \subseteq V \cup U \neq \emptyset$ Sea

$\{u_i\}_{i=1}^n \subseteq U$, base de U

con $n \geq 1$, sea $v \in V \setminus U$

a) explique por que $v \neq 0$

y muestre que

$\{v, v+u_1, \dots, v+u_n\} \subseteq V \cup U$

(Sol)

$$u \in S \cap V \Rightarrow 0 \in u$$

$$v \in S \cap V \Rightarrow 0 \in v$$

$$\Rightarrow 0 \notin V \setminus U$$

$$\therefore v \neq 0 //$$

ahora $v \in V \setminus U$ /

veamos que

$$v + u_i \in V \setminus U \quad \forall i$$

Supongamos que no

$$\Rightarrow v + u_i \in U, \text{ para } \forall i \in \mathbb{N}$$

1. $v \in U$

$$(v + u_i) - u_i \in U \quad \text{por } U \leq V$$

$$\Rightarrow v \in U \quad \text{y} \quad v \in V \setminus U$$

$$v \in U \cap (V \setminus U) = \emptyset \quad \rightarrow \in$$

$$\therefore v + u_i \in V \setminus U //$$

b) suponga

$$\dim(V) = \dim(U) + 1$$

muéstrame que

$\{v, v + u_1, \dots, v + u_n\}$ es
una base de V

Sol Son $(n+1)$ vectores

y $\dim(U) = n$ partiendo de $\{v_i\}_{i=1}^n$

comprobare luego si son

li. son base

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i (v + v_i) + \alpha v = 0$$

$$\Rightarrow v \left[\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i \right] + \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

Supongamos $\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$

$$\Rightarrow v = - \frac{1}{\alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i} \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\Rightarrow v \in U \rightarrow \Leftarrow$$

$$\text{luego } \alpha + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = 0 \quad \forall i \quad \text{por } v_i \text{ base}$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \{v, v+v_1, \dots, v+v_n\} \text{ son}$$

li, luego son base //

c) sea W un subespacio de V tal

$W \neq V$, y suponga

$\dim(W) = k < n$. Exprimire

porque $k \neq 0$ y $v \notin W$

ademas muetne que
 $\dim(U \cap W) \leq k-1$

Sol)

$k \neq 0$

Si $k=0 \Rightarrow W = \{0\} \subseteq U \rightarrow \in$

$\therefore k \neq 0$

$U \subseteq W$ si $U \subseteq W$

$\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(W) = k$

$\Rightarrow m \leq k \leq m$

$\Rightarrow m = k$

$\Rightarrow \dim(U) = \dim(W) \Rightarrow U = W$

$\downarrow$
teorema

$$\rightarrow \subseteq W \not\subseteq U.$$

$$\text{poq } \dim(U \cap W) \leq k-1$$

Sol

notamos

$$U \cap W \subseteq W$$

$$\downarrow \text{ } U \cap W \in \text{se } V$$

$$\Rightarrow \dim(U \cap W) \leq \dim(W) = k.$$

$$\text{a hora } \text{si } \dim(U \cap W) = k$$

$$\Rightarrow U \cap W = W \text{ (teorema)}$$

$$W = W \cap U \subseteq U$$

$$\Rightarrow W \subseteq U \rightarrow \subseteq$$

luego $\dim(V \cap W) < k$
 $\hookrightarrow$ entoro

$$\Rightarrow \dim(V \cap W) \leq k-1 //$$