

MA1102-4 Álgebra Lineal

Profesor: Jaime San Martín.

Auxiliar: Sebastián Bustos



Auxiliar 7 - Suma y Suma directa

P1. C5 P2 (iii) - Álgebra 1997

Sean los siguientes sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Muestre que son suma directa de $M_{2,2}$.

P2. C2 P3 - Álgebra 2018-2

Sea $S \subseteq P_3(\mathbb{R})$ un sev con base $B = \{x^2 + x + 1, x^3 + x, x^3 + 1\}$. Encuentre $W \subseteq P_3(\mathbb{R})$ tal que $S \oplus W = P_3(\mathbb{R})$

P3. C2 P3 (c) - Álgebra 2012-2

Sean U, W sev de V tales que $\dim(V) = 3$ y $\dim(U) = \dim(W) = 2$, con $U \neq W$. Demuestre que $\dim(U \cap W) = 1$

P4. Muestre que si S_n es el conjunto de las matrices simétricas de tamaño $\mathcal{M}_{n,n}$ y AS_n de las antisimétricas de tamaño $\mathcal{M}_{n,n}$. Demuestre que:

- [Propuesto] Muestre que S_n y AS_n son sev de $\mathcal{M}_{n,n}$
- Demuestre que $\mathcal{M}_{n,n} = S_n \oplus AS_n$
- Concluya que la descomposición de matrices en suma de anti simétrica y simétrica es única y exprese su forma.

P5. C5 P2 (b) y (d)- Álgebra 1996

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K . En $E \times E$ se definen las operaciones naturales (componente a componente). Sean los siguientes sev de $E \times E$:

$$U = \{(u, v) \in E \times E \mid u = v\}$$

$$V = \{(u, v) \in E \times E \mid u = -v\}$$

- a) Pruebe que $E \times E = U \oplus V$
- b) Si $\dim(E) = n$, calcule $\dim U$, $\dim V$ y $\dim(E \times E)$

P6. [Propuesto] C5 P2 (ii), (iii) y (iv) - Álgebra 1998

Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $P_m(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que m con coeficientes reales. Es decir: $p \in P_m(\mathbb{R})$ si $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$. Se define el siguiente sev:

$$V = \{p \in P_m(\mathbb{R}) : \forall i \in \{0, \dots, m\} a_i = a_{m-i}\}.$$

- a) Encontrar una base de V y deduzca que su dimensión es $n + 1$
- b) Probar que $P_m(\mathbb{R}) = V \oplus P_{n-1}(\mathbb{R})$
- c) Se define

$$V' = \{p \in P_m(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \{0, \dots, m\} a_i = -a_{m-i}\}$$

Probar que $P_m(\mathbb{R}) = V \oplus V'$ (asuma que V' es un sev de $P_m(\mathbb{R})$).

P7. [Propuesto] C2 P2 (b) - Álgebra 2015-2

Sea V un ev sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión $n \geq 1$ y T un sev de V de dimensión $n - 1$.

- a) Probar que $\forall v \notin T, T \oplus \langle \{v\} \rangle = V$
- b) Sea S un sev de V tal que $S \not\subseteq T$, entonces $S + T = V$. Calcule la dimensión de $S \cap T$ en función de la dimensión de S .

P8. [Propuesto] C2 P2 - Álgebra 2017-1

Sea V un ev y U un sev de V tal que $V \setminus U \neq \emptyset$. Considere $\{u_i\}_{i=1}^n \subseteq U$ una base de U , con $n \geq 1$, y tome $v \in V \setminus U$.

- a) Explique por qué $v \neq 0$ y muestre que $\{v, v + u_1, \dots, v + u_n\} \subseteq V \setminus U$
- b) Suponga que $\dim(V) = \dim(U) + 1$. Muestre que $\{v, v + u_1, \dots, v + u_n\}$ es una base de V
- c) Sea W un sev de V tal que $W \not\subseteq U$, y suponga además que $\dim(W) = k \leq n$. Explique porque $k \neq 0$ y $U \not\subseteq W$. Además muestre que $\dim(U \cap W) \leq k - 1$.

Resumen

- **[Teorema]** En $\mathbb{R}^n$, $m > n$ vectores son siempre linealmente dependientes.
- **[Proposición]** Si B es una base de V , los elementos del espacio vectorial v pueden ser escritos de manera única como combinación lineal de elementos en B
- **[Proposición]** de todo conjunto generador se puede obtener una base
- **[Teorema]** Si la base del espacio tiene n vectores y consideramos una colección de $m > n$ vectores en V entonces estos son l.d.
- **[Corolario]** Todas las bases tienen el mismo cardinal.
- **[Dimensión]** Diremos que un espacio vectorial V sobre K es de dimensión finita si admite una base de cardinalidad n . En caso que no exista una base de dimensión finita se dirán espacios vectoriales de dimensión infinita.
- **[Teoremaso]** Si $\dim(V) = n$ y $\{v_i\}_{i=1}^n$ son l.i entonces $\{v_i\}_{i=1}^n$ son base
- **[Teoremaso 2]** Sea U un sev de V , luego $\dim(U) \leq \dim(V)$ es más $\dim(U) = \dim(V) \implies U = V$
- **[Teoremaso 3]** Dado un ev V con $\dim(V) = n$, y un conjunto de vectores l.i $\{v_1, \dots, v_r\}$, con $r < n$, en-

tonces existen vectores $v_{r+1}, v_{r+2}, \dots, v_n$ tales que el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ son base de V .

- **[Suma de espacio vectoriales]** Sean U, W sev de V , se define:

$$U + W = \{v \in V | v = u + w, u \in U, v \in V\}$$

Se tiene que $U + W$ es un sev.

- **[Suma Directa]** Sean U, W sev de V diremos que $Z = U + W$ es suma directa de U y W si:

$$\forall v \in Z, \exists! u \in U, \exists! v \in W : z = u + v$$

Se denota $Z = U \oplus W$

- **[Caracterización de la suma directa]** Dado V ev y U, W, Z sev de V , entonces:

$$Z = U \oplus W \iff (Z = U + W) \wedge (U \cap W = \{0\})$$

- **[Dimension de la suma directa]** Sea V de dimensión finita se tiene que si $V = U + W$ entonces:

$$\dim(V) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$