

PAUTA AUX 6

P1]

- a) Estudie los siguientes conjuntos generadores, y encuentre una base. Estudie que pasa si se elimina un vector i en vez de 1 o 2 .

1) $\{(1,0), (2,0), (0,1)\}$

Sol Para saber cual eliminar hay que buscar aquel que para

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

tenga constante no nula, que es lo mismo que decir que hay que eliminar las columnas que generen variables libres en el sistema de

ecuaciones, luego

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0$$

así notamos que para
dejar el sistema con
solución única basta eliminar
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

luego $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ó $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

serven. Ahora si quitamos
(2) tenemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0 \quad \text{que } \underline{\underline{\text{no}}}$$

tienen solución única,
luego no son base $\therefore$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ generan pero

no genera el espacio, esto
por quitar un vector li del
sistema.

$$2) \{ (1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 3, 5) \}$$

Sol

estudiemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2' = f_2 - 2f_1 \\ f_3' = f_3 - 3f_1}]{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3' = f_3 - 2f_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

luego basta quitar $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\text{así } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ó } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

ahora si quitamos

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ quedamos con

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ quedamos con

sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$$F'_2 = F_2 - F_1$$

$\rightarrow$

$$F'_3 = F_3 - F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

luego este sistema también es base, pero apropiado lo

sabíamos ni podemos asegurarlo.

b) Estudie de manera teorica si $\{v_1, v_2, v_3\}$ generan un ser y son ld. Justifique porque si quitamos el vector ld entonces se tiene el mismo conjunto generador.

Sol)

Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ son ld luego si

$$\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$$

$$\text{luego } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow \exists$ alguna de las cte no nulas
spg supongamos $\gamma \neq 0$

luego

$$v_3 = -\frac{\alpha}{\gamma} v_1 - \frac{\beta}{\gamma} v_2$$

asi v_3 esta en el generador
de $\{v_1, v_2\}$.

luego el generado por
 $\{v_1, v_2\}$ es el mismo que $\{v_1, v_2, v_3\}$
por poder generar v_3 con $\{v_1, v_2\}$.

c) A partir de los siguientes
conjuntos, que son una base
de un sev , encuentre una
base del espacio del que son
 sev .

1) $\{(1, 1, 1)\}$

Sol Para esto uno se pone
con un generador ya
conocido

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

luego hay que ver el sistema

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} f_2' = f_2 - f_1 \\ f_3' = f_3 - f_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

luego reordenando columnas

$$\begin{bmatrix} c_1 & c_3 & c_4 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

luego si eliminamos c_2

nos queda un sistema
con solución única y $\therefore$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ generan } \mathbb{R}^3.$$

$$2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Sol

luego estudiamos

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

luego, estudiemos (es porando que funciona)

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\downarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{8} - 2 \end{bmatrix}$$

we go on similarly $\left[\frac{6}{8} - 2 \neq 0 \right]$

P2

Sea $U = \{ p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(1) = p'(1) = 0 \}$

um se v

a) Encuentre una base de U
y su dimensión

Sol $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\rightarrow p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

luego $p(1) = a + b + c + d$

$$p'(1) = 3a + 2b + c$$

luego

$$U = \{ p \in P_3(\mathbb{R}) \mid a + b + c + d = 3a + 2b + c = 0 \}$$

así $a + b + c + d = 0$

$$3a + 2b + c = 0 \rightarrow c = -3a - 2b$$

$$\rightarrow a + b - 3a - 2b + d = 0$$

$$\rightarrow d = 2a + b.$$

$$\text{as } p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

$$= ax^3 + bx^2 + [-3a - 2b]x + 2a + b$$

$$= a[x^3 - 3x + 2] + b[x^2 - 2x + 1]$$

$$\text{luego } \{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1\}$$

generam. Veamos si son

li es base.

luego

$$a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \forall x$$

$$\rightarrow ax^3 + bx^2 - [3a + 2b]x + 2a + b = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow a = 0, b = 0, 3a + 2b = 0, 2a + b = 0$$

$$\Rightarrow a = b = 0 \quad \therefore \text{son li}$$

luego son base y su dimensión es 2.

b) Extienda la base de la parte anterior a una base de $P_3(\mathbb{R})$

Sol notamos $\{1, x, x^2, x^3\}$ son base de $P_3(\mathbb{R})$ luego

$$\{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1, 1, x, x^2, x^3\}$$

estudiamos el sistema matricial asociado a

$$a(x^3 - 3x + 2) + b(x^2 - 2x + 1) + c \cdot 1 + d \cdot x + e x^2 + f x^3$$

$$x^3[a + f] + x^2[b + e] + x[-3a - 2b + d] + 2a + b + c = 0$$

$$+ 2a + b + c = 0$$

es decir

$$a + f = 0$$

$$b + e = 0$$

$$-3a - 2b + d = 0$$

$$2a + b + c = 0$$

$$\begin{matrix} & a & b & c & d & f & e \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \\ e \end{pmatrix} & = 0 \end{matrix}$$

luego sabemos que todas las bases son de la misma dimensión luego buscamos cuatro vectores $[\dim P_3 = 4]$ así propongo

$$\begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} & = 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \text{así} & a = 0 \\ & b = 0 \\ & -3a - 2b + d = 0 \\ & 2a + b + c = 0 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a = 0 \\ b = 0 \\ -3a - 2b + d = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{matrix}} \right\} \begin{matrix} d = 0 \\ c = 0 \end{matrix} \Rightarrow a = b = c = d = 0$$

luego los vectores asociados
a $\{a', b', c'\}$ y $\{d'\}$ son base
es decir

$\{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1, 1, x\}$ son
base de $P_3(\mathbb{R}) //$

c) considere ahora el
seV $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p''(0) = 0\}$

1) Encuentre una base de W
y su dimensión

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$p''(x) = 6ax + 2b$$

$$\text{luego } p''(0) = 0 = 2b$$

$$\text{así } p(x) = ax^3 + cx + d$$

luego

$$W = \{ax^3 + cx + d \mid a, c, d \in \mathbb{R}\}$$

así $\{x^3, x, 1\}$ es un generador de W es de dimensión 3 por que $\{x^3, x, 1\}$ son li

2)

extender la base es directo, Sabemos que $\{x^3, x^2, x, 1\}$ es base y es extensión de la base,

3) Encontrar una base de $U \cap W$ y su dimensión

$p \in U \cap W$ si $p \in U$ y $p \in W$

$$p \in U \text{ si } p(x) = ax^3 + bx^2 - [3a + 2b]x + 2a + b$$

además $p \in W$ si la componente de x^2 es cero luego $b = 0$

$$a.s; p(x) = ax^3 - 3ax + 2a$$

$$\text{luego } p(x) = a[x^3 - 3x + 2]$$

$\therefore \{x^3 - 3x + 2\}$ es la base del espacio y es de dim 1, //

4)

luego notemos

que $\{x^3 - 3x + 2\}$ pertenece a la base de $P_3(\mathbb{R})$

$$\{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1, x\}$$

encontrada en b)

luego la extendimos //

P3 Aux extra 

P4

a) muestre que $\mathbb{R}^n$ es
un $\mathbb{R}$ -v de dimensión
 n .

Sol

Proponemos

e_i = vector con ceros salvo un 1
en la componente i

con $i \in \{1, \dots, n\}$

es de lin $e_i = \underline{1}_i$

que generan.

luego veamos si son li

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & a_2 & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow a_i = 0 \forall i$ son l.i. son base
uego $\dim(\mathbb{R}^n) = n //$

b) Muestre que $M_{mm}(\mathbb{R})$
es un espacio de dimensión
 nm

Sol

Sea E_{ij} = la matriz con puntos
ceros salvo en ij
donde hay un 1

uego $\{E_{ij}\}_{\substack{i,j=1,\dots,m \\ i,j=1,\dots,n}}$ es nuestra

base candidata ya que
genera

ahora $\sum_{ij} a_{ij} E_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ & & & \\ & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i, j$ luego son 11

así $\{E_{ij}\}$ es base

donde hay $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$
elementos es decir $n \cdot m$
es la dim //

c) Muestre que $P_n(\mathbb{R})$ es un
espacio de dimensión $n+1$

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

luego $\{x^i\}_{i=0}^n$ generan

veamos que son li

luego

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0 \quad \forall x \text{ ssi } a_i = 0 \quad \forall i$$

↳ igualdad polinómicas

luego $\{x^i\}_{i=0}^n$ son li. generam

⇒ son base luego

$$|\{x^i\}_{i=0}^n| = n+1 //$$

P5 y P6

preguntan en el P070 y la

