MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 6 - Sub espacio, linealmente independiente y generadores

P1. Entendiendo generadores y base

a) Estudie los siguientes conjuntos generadores, y encuentre una base. Estudie que pasa si se elimina un vector l.i en vez de ld.

1) $\{(1,0),(2,0),(0,1)\}$
2) $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,3,5)\}$

b) Estudie de manera teorica si $\{v_1,v_2,v_3\}$ generan un sev y son ld. Justifique porque si quitamos el vector ld entonces se tiene el mismo conjunto generador. (Entiendase vector ld como aquel que tiene escalar distinto de cero en la combinación lineal).

c) A partir de los siguientes conjuntos, que son una base de un sev, encuentre una base del espacio del que son sev.

1) $\{(1,1,1)\}$
2) $\{(1,2,-3),(2,1,0,-2),(0,1,2,1)\}$

P2. ***C2 P2 - Lineal 2008-1***

En el siguiente problema considere el subespacio vectorial $U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) | p(1) = p'(1) = 0\}$

a) Encuentre una base de U y su dimensión

b) Extienda la base de la parte anterior a una base de $P_3(\mathbb{R})$

c) Considere ahora el subespacio vectorial $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) | p''(0) = 0\}$

1) Encuentre una base de W y su dimensión
2) Extienda la base de W a una base de $P_3(\mathbb{R})$
3) Encuentre una base $U \cap W$ y su dimensión
4) Extienda la base de U a una base de $P_3(\mathbb{R})$

P3. ***C5 P3 - Algebra 2002***

Sea $M_{2,2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los siguientes sev (no lo demuestre) de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) 1 A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\} \; W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | A_{11} + A_{22} = 0\}$$

a) Encuentre una base de W_1 y de su dimensión

b) A partir de la base de W_1 encuentre una base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

c) Encuentre una base de W_2 y de su dimensión

d) A partir de la base de W_2 encuentre una base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

e) Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$ y de su dimensión

f) A partir de la base de $W_1 \cap W_2$ encuentre una base de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

P4. Dimensiones conocidas

a) Muestre que en $\mathbb{R}^n$ es un espacio de dimensión n

b) Muestre que en $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ es un espacio de dimensión nm

c) Muestre que $P_n(\mathbb{R})$ es un espacio de dimensión $n+1$

P5. Pregunta dificil 1 Sea un cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $|\mathbb{K}| > n-1$, sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

a) Muestre que V no es igual a la union de n sub espacios propios de V.

b) Conlcuya, en base a lo realizado anteriormente , que si $m \geq 2$ entonces se necesita una cantidad no numerable de sub espacios propios de $\mathbb{R}^m$ para que $\mathbb{R}^m$ sea la union de los sub espacios.

Diremos que un sev es propio si no es el ev completo.

P6. Pregunta dificil 2 Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Y sea $\mathcal{F}(V,\mathbb{K})$ el espacio vectorial de las funciones $f : V \to \mathbb{K}$ donde se define $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ y $(\alpha f)(v) = \alpha f(v)$. Se define

$$V^* = \{f \in \mathcal{F}(V,\mathbb{K}) | f \text{ es un morfismo de } (V,+) \text{ a } (\mathbb{K},+)\}$$

a) Muestre que V^* es sev de $\mathcal{F}(V,\mathbb{K})$

Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V (fija durante el problema). Si $u \in V$ entonces $u = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i$. Definimos la función $\phi_j(u) = x_j$ donde $j \in \{1,..,n\}$

a) Muestre que ϕ_j esta bien definida como función y que $\phi_j \in V^*$

b) Pruebe que una base del espacio V^* es $\{\phi_1, ..., \phi_j\}$

Obs: Estas ultimas dos preguntas tendran pauta solo si alguíen publica en el foro un intento de solución, una solución o alguna duda Si se pregunta solo de la 1 se subira de la 1. Si se pregunta solo de la 2 se subira de la 2.

Resumen

- **[Subespacio Vecotrial]** Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \subseteq V$ es sub espacio vectorial (sev) de V si cumple:
  - *a)* $U \neq \emptyset$
  - *b)* $\forall u, v \in U, u + v \in U$
  - *c)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U$
- **[Caracterización Subespacio Vectorial]** Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. U es sev ssi
  - *a)* $U \subseteq V$
  - *b)* $U \neq \emptyset$
  - *c)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in U, \lambda u + v \in U$
- **[Combinación Lineal]** Sea V un ev. Dado una colección $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Denominamos combinacion a la suma ponderada de vectores:
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$
- **Independencia Lineal** Un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ se diran linealmente independientes (li) si
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \forall i \in \{1, ..., n\}$$
- **Dependencia Lineal** Un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ se diran linealmente dependientes (ld) si **no** son linealmente independientes.
- **[El conjunto de todas las combinaciones lineales]** Dado V un sev sobre K y un conjunto fijo $v_1, ..., v_n \in V$ de vectores, se define el conjunto de sus combinaciones lineales como:
$$\langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = \{v \in V | v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \lambda_i \in K\}$$
Se le llama el sub espacio vectorial generado por $\{v_i\}_{i=1}^n$
- **[Teorema]** En $\mathbb{R}^n$, $m > n$ vecotres son siempre linealmente dependientes.
- **[Generadores]** se dice que $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ generan al ev V si:
$$\langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = V$$
- **[Base]** Dado un ev V sobre K, diremos que el conjunto $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base si generan y son li.
- **[Proposición]** Si B es una base de V, los elementos del espacio vectorial v pueden ser escritos de manera única como combinación lineal de elementos en B
- **[Proposición]** de todo conjunto generador se puede obtener una base
- **[Teorema]** Si la base del espacio tiene n vectores y consideramos una colección de $m > n$ vectores en V entonces estos son ld.
- **[Corolario]** Todas las bases tienen el mismo cardinal.
- **[Dimensión]** Diremos que un espacio vectorial V sobre K es de dimensión finita si admite una base de cardinalidad n. En caso que no exista una base de dimensión finita se diran espacios vectoriales de dimensión infinita.
- **[Teoremaso]** Si $dim(V) = n$ y $\{v_i\}_{i=1}^n$ son li entonces $\{v_i\}_{i=1}^n$ son base
- **[Teoremaso 2]** Sea U un sev de V, luego $dimU \leq dim(V)$ es más $dim(U) = dim(V) \implies U = V$