PAUTA AUX 5

P1

a) Vea si los vectores

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ son li

Sol

Para eso hay que estudiar

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

notamos que podemos escribirlo de forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ c \end{pmatrix} = 0$$

queremos ver que $\alpha = \beta = c = 0$ sea la única solución

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2' = f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3' = f_3 - \frac{3}{2} f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

asi la solución <u>única</u> es $\alpha = \beta = c = 0$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = c = 0$$

<u>son</u> li

b) Modifique los vectores para que sean ld o li

<u>Sol</u> como son li quiero hacerlos ld notamos que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Scanned by CamScanner

así si consideramos

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ van a ser l.d.//

c) sea $A \in M_{n,m}$ muestre que

$Ax=0$ tiene sol única ssi las columnas

de A son l.i [vistas como vectores de $\mathbb{R}^n$]

sol]

$\Rightarrow$] notamos que

$$Ax=0 \iff \begin{bmatrix} A_{\bullet 1} & A_{\bullet 2} & A_{\bullet m} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 \cdot A_{\bullet 1} + x_2 \cdot A_{\bullet 2} \cdots x_m A_{\bullet m} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$$

$\hookrightarrow$ por el sistema tener sol única

$\therefore \{A_{\cdot 1}, \_\_\_, A_{\cdot m}\}$ son l.i

<u>obs:</u>

Por teorema sabemos entonces que la única forma que esto pase es que $n \geq m$

$\Leftarrow$] Si $\{A_{\cdot 1}, \_\_\_, A_{\cdot m}\}$ son l.i

$\Rightarrow x_1 A_{\cdot 1} + \_\_\_ + x_m A_{\cdot m} = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = \_\_\_ = x_m = 0$

es decir

$$[A_{\cdot 1} \ A_{\cdot 2} \ \cdots \ A_{\cdot m}] \begin{pmatrix} x_1 \\ | \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x_1 = \_\_\_ = x_m = 0$

i.e $AX = 0 \Rightarrow X = 0$!!

∴ el sistema tiene solución única //

P2

Sea V espacio vectorial de dimensión n. Decimos que $\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq V$ es un casi independiente de vectores si $m > n$ y $\forall j \in \{1, \ldots, m\}$ se tiene $\{v_1, \ldots, v_m\} \setminus \{v_j\}$ es li

a) pruebe que si $\{v_1, \ldots, v_m\}$ es casi independiente, entonces $m = n+1$

Sol

Supongamos que $m > n+1$

$\Rightarrow m \geq n+2$

así sea $j \in \{1, \ldots, m\}$ y entonces

$\{v_1, \ldots, v_m\} \setminus \{v_j\}$ es li por propiedad notamos que

$|\{v_1, \ldots, v_m\} \setminus \{v_j\}| = m-1$

$\Rightarrow m-1 \geq m-1 > n$

$\Rightarrow m-1 > n$

Pero por teorema como $m-1 > n$

ese conjunto es ld $\rightarrow \Leftarrow$

así $m < n+2 \Rightarrow m \leq n+1$

y $n < m \leq n+1$

$\Rightarrow m = n+1$ //

b) de un ejemplo en $V = \mathbb{R}^2$ de un

conjunto casi independiente.

Scanned by CamScanner

no es dificil convencerse que

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ cumple lo pedido.

ie

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

son l.i

$\boxed{P_3}$

a) sea $P_n(\mathbb{R})$ el espacio delos polinomios de grado menor o igual a n.

Sean $\{p, q\} \subset P_n$ tq $\{p, q\}$ es l.i

pdq $\{p, q, p \cdot q\}$ es l.i ssi

grado$(p) \geq 1$ y grado$(q) \geq 1$

Sol

=>

$\{p, q, p\cdot q\}$ l.i

supongamos que no se cumple

q grado(p) ≥ 1 y grado(q) ≥ 1

es decir grado(p) < 1 ó grado(q) < 1

por simetría basta ver 1 caso

grad(p) ≤ 0 es decir $p = c$, cte

$\Rightarrow \{c, q, cq\}$ es l.i

Sabiendo que $\{c, q\}$ es l.i

veamos que existe una

combinación que hace

no ser li a los vectores

una pamba

$(0, -c, 1)$

$\Rightarrow 0 \cdot c - c \cdot q + cq = 0$

$\therefore$ no son li $\Rightarrow \Leftarrow$ //

$\boxed{\Leftarrow}$ supongamos $\left.\begin{array}{l}\text{grado}(p) \\ \text{grado}(q)\end{array}\right\} \geq 1$

pdq $\{p, q, pq\}$ es li

estudiemos

$\alpha p + \beta q + \gamma pq = 0$

supongamos que $\gamma \neq 0$

$\Rightarrow pq = -\frac{\alpha}{\gamma} \cdot p + \frac{\beta}{\gamma} q$

$\Rightarrow grd(pq) = grd\left(-\frac{\alpha}{\gamma} p + \frac{\beta}{\gamma} q\right)$

$= grd(p) + grd(q)$

y $grd(pq) = \max\{grd(p), grd(q)\}$

$\therefore \max\{grd(p), grd(q)\} = grd(p) + grd(q)$

$\rightarrow\leftarrow$ ya que $grd(p), grd(q) \geq 1$ ✓

así $\gamma = 0$

$\Rightarrow \alpha p + \beta q = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$, por ser l.i.

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

P4 Sea W un sev de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Scanned by CamScanner

a) determine una base de W y su dimensión

Sol

como $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}$

generan si son l.i estamos listos

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\3\\2\\3\end{pmatrix}=0$$

estudiamos

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&3\\1&1&2\\1&-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=0$$

Scanned by CamScanner

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_3' = f_3 - f_1 \\ f_4' = f_4 - f_1}]{f_2' = f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ quitando fila de ceros

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \therefore$$

el sistema <u>no</u> tiene solución única

asi al generar le puede quitar vector es hasta que quede li y ese va a ser la base

veamos que

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ es li

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$\alpha + \beta = 0 \longrightarrow 2\alpha = 0$

$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta$

$\alpha + \beta = 0$

$\alpha - \beta = 0$

$\alpha = \beta = 0$

Les dejo propuesto que

$-5V_1 + V_2 + 2V_3 = 0$

para ver que no son L d realmente

y $V_3 = +\frac{5}{2}V_1 - \frac{V_2}{2}$

asi $\{V_1, V_2\}$ son l i y generan

$\Rightarrow$ la dimension de W

es '2'.

b) Extienda la base

encontrada en (a) a

una base de $\mathbb{R}^4$

Sol)

para esto agregamos una base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

asi basta encontrar LI vectores li, notar que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

son li y generan $\therefore$

son base //

P5

a) Sea $V = \{ P \in P_3(\mathbb{R}) \mid P(x) = q(x)(x^2+5)$
Para algún
polinomio
a coef. reales$\}$

Calcule su dimensión y de
una base

$gr(P) = gr(q(x)(x^2+5))$

$= gr(q) + gr(x^2+5)$

$= gr(q) + 2$

$\Rightarrow gr(q) \leq 1$

$\therefore q(x) = ax+b$

$\Rightarrow \quad P(x) = (ax+b)(x^2+5)$

$= a(x^3+5x) + b(x^2+5)$

asi es intuitivo

pensando que

$\{x^3+5x, x^2+5\}$ son li

si lo son generan por definición

estudiemos

$a(x^3+5x)+b(x^2+5)=0$

$ax^3+5ax+bx^2+b5=0$

$\Rightarrow \quad a=0 \quad, 5a=0 \quad, b=0, \; b\cdot 5=0$

$\Downarrow$

igualdad polinomial $\quad \Rightarrow \quad a=b=0$

$\therefore$ son li y generan ie son base

Scanned by CamScanner

así se tiene que

$\dim(V) = 2$ //

b) sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right.$

y W el sev de $\mathbb{R}^4$ generado por A.

Extraiga una base de W

y encuentre su dimensión

resolvemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4' = F_4 - F_1]{F_3' = F_3 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3' = F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Filas}]{\text{Permutando}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

∴ Son l.i y generan así

Son base: $\dim(W) = 4$

P6]

En el siguiente problema considere el sev

$$U = \{ P \in P_3(\mathbb{R}) \mid P(1) = P'(1) = 0 \}$$

a) Encuentre una base de U y su dimensión

Sol] para esto necesitamos encontrar un generador para esto expicitemos que significa $P(1) = P'(1) = 0$

$P \in P_3(\mathbb{R})$, $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P(1) = 0 \rightarrow a + b + c + d = 0$

$P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\therefore p'(1)=0 \longrightarrow 3a+2b+c=0$

así $\quad a+b+c+d=0 \quad (1)$

$\quad\quad 3a+2b+c=0 \quad (2)$

estomos dice que hay 2 posibles variables libres y por lo tanto esperamos que el sev sea de dim 2

$c=-3a-2b \quad (2)$

$d=-a-b-c=-a-b-[-3a-2b] \quad (1)$

$=-a-b+3a+2b=2a+b$

asi

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$= ax^3 + bx^2 + [-3a-2b]x + 2a + b$ (*)

$= ax^3 - 3ax + 2a + bx^2 - 2bx + b$

$= a[x^3 - 3x + 2] + b[x^2 - 2x + 1]$

$\therefore \{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1\}$ generan

basta ver si son li

para eso notamos que (*) tiene

que ser igualado a cero

y por ser polinomios es

lo mismo que

$a = 0, b = 0, -3a - 2b = 0, 2a + b = 0$

$\Rightarrow a = b = 0$

∴ son li, genera $\Rightarrow$ son base

y $\dim(U) = 2$ //

b) Extienda la base de la parte anterior a una base de P_3

así se sabe que

$\{1, x, x^2, x^3\}$ es base

así $\{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1, 1, x, x^2, x^3\}$

propongo

$\{x^3 - 3x + 2, x^2 - 2x + 1, 1, x\}$

como base

asi

$$a(x^3-3x+2)+b(x^2-2x+1)+c\cdot 1+d\cdot x=0$$

$$\Rightarrow ax^3+bx^2+[-3a-2b+d]x+(2a+b+c)=0$$

$$\Rightarrow a=b=-3a-2b+d=2a+b+c=0$$

$$\Rightarrow a=b=0$$

$$d=c=0$$

$$\Rightarrow a=b=d=c=0$$

son li de dim(4) $\therefore$ generan

P_3 y por en de son base

c) considere ahora el

sev $W = \{ p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p''(0) = 0 \}$

1) Encuentre una base de

W y su dimensión

Sol:

Sea $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p''(x) = 6ax + 2b$

$p''(0) = 0 = 2b$

$\therefore$ $b = 0$ así

$p(x) = ax^3 + cx + d$

entonces una base

es $\{ x^3, x, 1 \}$ y su dim es 3

2) Encuentre una base $U \cap W$ y su dim

Sol:

ahora sea $p \in W$:

$$p(x) = ax^3 + bx^2 - [3a + 2b]x + 2a + b$$

vimos que $p \in U$ ssi $b = 0$

así:

$p \in U \cap W$ si

$$p(x) = ax^3 - [3a + 2b]x + 2a + b$$

$$= a[x^3 - 3x + 2] + b[-2x + 1]$$

$\therefore$ los candidatos a base son

$$\{x^3 - 3x + 2, -2x + 1\}$$

los cuales son l.i. ∴

son base para generar así

$\dim(U \cap W) = 2$ //

$\boxed{P_7}$

Sea $m = 2n$ con $n > 0$

y considere el ev $P_m(\mathbb{R})$

Se define el sev

$V = \{ p \in P_m \mid \forall i \in \{0, \ldots, m\}\ a_i = a_{m-i} \}$

Encontrar una base y

deduzca que su dimensión

es $n+1$

Sol

$$p(x) = \sum_{k=0}^{2m} a_k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum_{k=m}^{2m} a_k x^k$$

observamos $a_i = a_{m-i} = a_{2m-i}$

$\Rightarrow$ $i = m$

$a_m = a_m$ no ganamos info

$$= \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum_{k=m+1}^{2m} a_k x^k + a_m x^m$$

Prop. 9

$$\text{Sumas} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{m-1} a_{2m-k} x^{2m-k} + a_m x^m$$

Scanned by CamScanner

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{2n-k} + a_n x^n$$

hip $a_i = a_{2n-i}$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k [x^k + x^{2n-k}] + a_n x^n$$

un generador es

$\{x^n, x^0 + x^{2n-0}, x^1 + x^{2n-1}, \ldots, x^{n-1} + x^{n+1}\}$

así basta ver que son

li [ai ojo y al corazon]

Creemos que si por haber $n+1$ elementos sabemos $\{1, x^1, \ldots, x^m\}$ es li

asi nosotro estamos resolviendo

$$\alpha_0 1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{m-1} x^{m-1}$$
$$+ \alpha_m x^m + \alpha_{m+1} x^{m+1} + \ldots + \alpha_0 x^{2m} = 0$$

y sabemos que estos

son li $\therefore$ $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{m-1} = \alpha_m = 0$

asi se concluye

P8)

Sea $M_{2,2}$ eV de las matrices

Sean los siguientes sev

$W_1 = \{ A \in M_{2,2} \mid A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0 \}$

$W_2 = \{ A \in M_{2,2} \mid A_{11} + A_{22} = 0 \}$

a) Encuentre una base de W_1 y su dimensión

Sol

$A \in W_1 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con

$a + b + c + d = 0$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-c-d & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

$$= b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

asi

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

generam veamos que

son li

$$a\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -a - b - c = 0$$

$$a = 0$$

$$b = 0$$

$$c = 0$$

//

asi son li ∴ base

$\Rightarrow \dim(W_1) = 3$

b) Para W_2 encuentre una base y su dimensión

Sol

$A \in W_2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow a + d = 0$

$\therefore A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

asi un generador es

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

además no es difícil convencerse que

$$a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=0$$

$\Rightarrow a=b=c=0$

$\therefore$ generan, son l.i., i.e.

son base W_2

$\dim(W_2)=3$

c) encuentre una base de $W_1 \cap W_2$ y de su dimensión

Sol,

$A \in W_1 \cap W_2$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$a + b + c + d = 0$

$a + d = 0$

$b + c = 0$

$a + d = 0$

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$

$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

así

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ son

generadores y son l.i

$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0$

$b = 0 \qquad \Rightarrow a = b = 0$

$-b = 0$

$-a = 0$

$\therefore$ son base y $W_1 \cap W_2$ es

de dimensión 2