MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 5 - Sub espacio, linealmente independiente y generadores

P1. *a*) Vea si los vectores $(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3)$ son l.i

b) Modifique los vectores anteriores para que sean l.d o l.i (dependiendo si son o no l.i)

c) Sea $A \in \mathcal{M}_{n,m}$ muestre que $Ax = 0$ tiene solución única ssi las columnas de A son linealmente independientes (vistas como vectores de $\mathbb{R}^n$).

P2. **[Propuesto]** ***C5 P2 (i) - Algebra 2001***

Sea V espacio vectorial de dimensión n. Decimos que $\{v_1, ..., v_m\} \subseteq V$ es un conjunto casi independiente de vectores si $m > n$ y para todo $j \in \{1, ..., m\}$ se tiene que $\{v_1, ..., v_m\} \backslash \{v_j\}$ es li

a) Pruebe que si $\{v_1, ..., v_m\}$ es casi independiente, entonces $m = n + 1$

b) De un ejemplo en $V = \mathbb{R}^2$ de un conjunto casi independiente

P3. ***C2 P3 (b) - Lineal 2012-2***
Sea $P_n(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que n. Sean $p, q \in P_n$ tales que $\{p, q\}$ es l.i. Demueste que $\{p, q, p \cdot q\}$ es l.i ssi grado(p) ≥ 1 y grado(q) ≥ 1.

P4. ***C5 P1 (i) y (ii) - Algebra 1997***
Sea W el sub espacio vectorial de R^4 generado por los vectores:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

a) Determine una base de W y su dimensión

b) Extienda la base encontrada en (a) a una base de $\mathbb{R}^4$

P5. **[Propuesto]** ***C5 P2 (a) y (b) - Algebra 1999***

a) Sea $V = \{p \in P_3(\mathbb{R}) | p(x) = q(x)(x^2 + 5)$ para algún polinomio a coeficientes reales $q\}$ un sev de $P_3(\mathbb{R})$, no lo pruebe. Calcular la dimension de V y dar una base.

b) Sea $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ y W el subespacio de R^4 generado por A. Extraiga una base de W y encuentre su dimensión.

P6. ***C2 P2 - Lineal 2008-1***
En el siguiente problema considere el subespacio vectorial $U = \{p \in P_3(\mathbb{R}) | p(1) = p'(1) = 0\}$

a) Encuentre una base de U y su dimensión

b) Extienda la base de la parte anterior a una base de $P_3(\mathbb{R})$

c) Considere ahora el subespacio vectorial $W = \{p \in P_3(\mathbb{R}) | p''(0) = 0\}$

1) Encuentre una base de W y su dimensión

2) Encuentre una base $U \cap W$ y su dimensión

P7. ***C5 P2 (ii) - Algebra 1998***

Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el ev $P_m(\mathbb{R})$. Se define el sev (no lo pruebe):

$$V = \{p \in P_m(\mathbb{R}) : \forall i \in \{0, ..., m\}, a_i = a_{m-i}\}$$

Encontrar una base de V y deduzca que su dimensión es $n + 1$.

P8. [**Propuesto**] ***C5 P3 - Algebra 2002***

Sea $M_{2,2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Considere los siguientes sev (no lo demuestre) de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$W_1 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})1A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22} = 0\} \; W_2 = \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})|A_{11} + A_{22} = 0\}$$

a) Encuentre una base de W_1 y de su dimensión

b) Encuentre una base de W_2 y de su dimensión

c) Encuentre una base de $W_1 \cap W_2$ y de su dimensión

Resumen

- [**Subespacio Vecotrial**] Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \subseteq V$ es sub espacio vectorial (sev) de V si cumple:
  - *a*) $U \neq \emptyset$
  - *b*) $\forall u, v \in U, u + v \in U$
  - *c*) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U$
- [**Caracterización Subespacio Vectorial**] Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. U es sev ssi
  - *a*) $U \subseteq V$
  - *b*) $U \neq \emptyset$
  - *c*) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in U, \lambda u + v \in U$
- [**Combinación Lineal**] Sea V un ev. Dado una colección $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Denominamos combinacion a la suma ponderada de vectores:
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$
- **Independencia Lineal** Un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ se diran linealmente independientes (li) si
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \forall i \in \{1, ..., n\}$$
- **Dependencia Lineal** Un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ se diran linealmente dependientes (ld) si **no** son linealmente independientes.
- [**El conjunto de todas las combinaciones lineales**] Dado V un sev sobre K y un conjunto fijo $v_1, ..., v_n \in V$ de vectores, se define el conjunto de sus combinaciones lineales como:
$$\langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = \{v \in V | v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \lambda_i \in K\}$$
Se le llama el sub espacio vectorial generado por $\{v_i\}_{i=1}^n$
- [**Teorema**] En $\mathbb{R}^n$, $m > n$ vecotres son siempre linealmente dependientes.
- [**Generadores**] se dice que $\{v_1, ..., v_n\} \subseteq V$ generan al ev V si:
$$\langle\{v_1, ..., v_n\}\rangle = V$$
- [**Base**] Dado un ev V sobre K, diremos que el conjunto $\{v_i\}_{i=1}^n$ es una base si generan y son li.
- [**Proposición**] Si B es una base de V, los elementos del espacio vectorial v pueden ser escritos de manera única como combinación lineal de elementos en B
- [**Proposición**] de todo conjunto generador se puede obtener una base
- [**Teorema**] Si la base del espacio tiene n vectores y consideramos una colección de $m > n$ vectores en V entonces estos son ld.
- [**Corolario**] Todas las bases tienen el mismo cardinal.
- [**Dimensión**] Diremos que un espacio vectorial V sobre K es de dimensión finita si admite una base de cardinalidad n. En caso que no exista una base de dimensión finita se diran espacios vectoriales de dimensión infinita.
- [**Teoremaso**] Si $dim(V) = n$ y $\{v_i\}_{i=1}^n$ son li entonces $\{v_i\}_{i=1}^n$ son base
- [**Teoremaso 2**] Sea U un sev de V, luego $dimU \leq dim(V)$ es más $dim(U) = dim(V) \implies U = V$