MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 4 - Espacios Vectoriales

P1. Muestre que los siguientes conjuntos, con sus operaciones respectivas son espacios vecotriales:

a) Sean X un conjunto. $(\mathcal{F}(X,\mathbb{R}),+)$ es espacio vectorial sobre R. Donde $\mathcal{F}(X,Y)=\{f:X\mapsto Y|\text{ f es función}\}$

b) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:=\{(a_n)_n|a_n\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}\}$ se define $(a_n)_n+(b_n)_n=(a_n+b_n)_n$ y $\lambda(a_n)_n=(\lambda a_n)_n$. Entonces $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+)$ es ev.

c) Pruebe que para $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ y $\mathbb{K}$ un cuerpo. $GL(n,\mathbb{K})=\{M\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})|M$ es invertible $\}$ **NO** es ev con la multiplicación de matrices sobre $\mathbb{K}$.

d) **[Propuesto]** En R definimos $x*y=xy$ para $x,y\in\mathbb{R}_+\backslash\{0\}$ y con $k\times x=x^k$ $k\in\mathbb{Z}$ entonces $(\mathbb{R}_+,*)$ es ev sobre $\mathbb{Z}$.

e) **[Propuesto]** Sea $n\geq 1$ y $m\geq 1$. ($\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$,+) es ev sobre $\mathbb{K}$.

P2. Muestre que los siguientes conjuntos, con sus operaciones respectivas son sub espacios vectoriales:

a) Pruebe que para $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ y K un cuerpo. Se define $V(n,\mathbb{K})=\{M\in\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})|V$ sea invertible y triagunlar superior$\}$, entonces $(V,\cdot)$ **NO** es sev de $(GL(n,\mathbb{K}),\cdot)$

b) $(P_m(\mathbb{R}),+)$ los polinomios de grado a lo mas m son sev de $(\mathcal{F}(X,R),+)$.

c) Sea $M\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. $V(M)=\{x\in\mathbb{R}^m|Mx=0\}$ es sev de $\mathbb{R}^n$.

P3. ***C2 P3 (a) - Lineal 2015-1***
Sea V un ev sobre $\mathbb{K}$ y sean S,T sev de V.

a) Demuestre que $S\cup T$ es un sev de V ssi $S\subseteq T$ o $T\subseteq S$

b) Demuestre que $S\cap T$ es siempre un sev de V.

P4. ***C5 P2 (a) y (b) - Algebra 1996***
Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo K. En $E\times E$ se definen las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}(u,v)+(u',v') &= (u+u',v+v')\\ \lambda(u,v) &= (\lambda u,\lambda v)\end{aligned}$$

a) **[Propuesto]** Pruebe que $E\times E$, con las operaciones anteriores, es un espacio vectorial sobre K.

b) Considere los conjuntos

$$\begin{aligned}\delta &= \{(u,v)\in E\times E|u=v\}\\ \overline{\delta} &= \{(u,v)\in E\times E|u=-v\}\end{aligned}$$

Pruebe que son subespacios vectoriales de $E\times E$

P5. ***C1 P1 (b) - Lineal 2015-2***

Para cada $\alpha\in\mathbb{R}$ se define: $V_\alpha=\{p\in P_4(\mathbb{R})$ con $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4|a=e,b=d,a+b+c+d=\alpha\}$
Demuestre que V_α es sev de $P_4(\mathbb{R})$ ssi $\alpha=0$.

P6. ***C5 P2 (i) y (iii) - Algebra 1997***

Sean $U=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})|a,b\in\mathbb{R}\right\}$ y $V=\left\{\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})|c,d\in\mathbb{R}\right\}$ muestre que son subespacios vectoriales de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$

P7. ***C5 P2 (i) - Algebra 1998***

Sea $m \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ y considere el conjunto $P_m(\mathbb{R})$ de los polinomios de grado menor o igual que m con coeficientes reales. Es decir: $p \in P_m(\mathbb{R})$ si $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_mx^m$. Se define el conjunto:

$V = \{p \in P_m(\mathbb{R}) : \forall i \in \{0, ..., m\} a_i = a_{m-i}\}$. Demuestre que V es sev de $P_m(\mathbb{R})$.

P8. ***C5 P2 (a1) - Algebra 1999***

Para $n \in \mathbb{N}$ se define $P_n(\mathbb{R})$ como el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n a coeficientes reales. Sea $V = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) | p(x) = q(x)(x^2 + 5)$ para algún polinomio a coeficientes reales $q(x)\}$ demuestre que V es un sev.

P9. ***C5 P3 (a) y (b) - Algebra 2002***

Sea $M_{2,2}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices de 2×2 a coeficientes reales sobre el cuerpo de R. Considere los subconjuntos W_1, W_2 de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ definidos por:

$$\begin{aligned} W_1 &= \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | a_{1,1} + a_{1,2} + a_{2,1} + a_{2,2} = 0\} \\ W_2 &= \{A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) | traza(A) = 0\} \end{aligned}$$

Demuestre que W_1, W_2 son sev de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

P10. [**Propuesto**] ***C2 P2 (a) - Lineal 2014-1***

Considere en $\mathbb{R}^2$ las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} (u, v) * (u', v') &= (u + u' - 2, v + v' - 1) \\ \lambda(u, v) &= (\lambda(u - 2), \lambda(v - 1)) + (2, 1) \end{aligned}$$

Demuestre que $\mathbb{R}^2$ es un ev sobre $\mathbb{R}$.

Resumen

- [**Espacio Vectorial**] Dado un grupo abeliano $(V, +)$ y un cuerpo $\mathbb{K}$, con una ley de composición externa. Diremos que V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ si $\forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V$:

Ax1: $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

Ax2: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

Ax3: $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$

Ax4: $1 \cdot x = x$ donde 1 es el neutro multiplicativo del cuerpo K.

- [**Subespacio Vecotrial**] Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que $U \subseteq V$ es sub espacio vectorial (sev) de V si cumple:
  a) $U \neq \emptyset$
  b) $\forall u, v \in U, u + v \in U$
  c) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in U, \lambda u \in U$
- [**Caracterización Subespacio Vectorial**] Sea un espacio vectorial V sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. U es sev ssi
  a) $U \subseteq V$
  b) $U \neq \emptyset$
  c) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in U, \lambda u + v \in U$
- [**Combinación Lineal**] Sea V un ev. Dado una colección $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Denominamos combinacion a la suma ponderada de vectores:
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$
- **Independencia Lineal** Un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ se diran linealmente independientes (li) si
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \implies \lambda_i = 0 \forall i \in \{1, ..., n\}$$
- **Dependencia Lineal** Un conjunto de vectores $\{v_i\}_{i=1}^n \subseteq V$ se diran linealmente dependientes (ld) si **no** son linealmente independientes.