

P1 Muestre que los siguientes conjuntos, con sus operaciones respectivas, son espacios vectoriales.

a) Sea X un conjunto. $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +)$ es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Donde $\mathcal{F}(X, Y) = \{f: X \rightarrow Y \mid f \text{ es función}\}$

Dem

1) Hay que mostrar que $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +)$ es grupo abeliano

$(G, *)$ es grupo abeliano si

$$1) \forall a, b, c \in G \quad (a * b) * c = a * (b * c) \quad [\text{Asociatividad}]$$

$$2) \exists e \in G \quad (a * e) = (e * a) = a \quad \forall a \in G \quad [\text{Neutro}]$$

$$3) \forall a \in G \exists b \in G \quad a * b = b * a = e \quad [\text{Inverso}]$$

$$4) \forall a, b \in G \quad (a * b) = (b * a) \quad [\text{Commutar}]$$

Pda $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +)$ es abeliano.

1) Comutatividad:

Sea $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ pda

$$f + g = g + f$$

Sea $x \in X$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ / por def

$$= g(x) + f(x) \quad / \quad \text{Por } \mathbb{R} \text{ comuta}$$

$$= (g + f)(x)$$

$$\Rightarrow (f + g) = (g + f) //$$

2) Asociatividad

$f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ pda $f + (g + h) = (f + g) + h$

Sea $x \in X$ $(f + (g + h))(x) = f(x) + (g + h)(x)$

$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$

$$\stackrel{\substack{\mathbb{R} \\ \text{asocia}}}{\Leftarrow} = (f(x) + g(x)) + h(x)$$

$$= (f + g)(x) + h(x)$$

$$= ((f + g) + h)(x) //$$

$$\Rightarrow (f + (g + h)) = ((f + g) + h) //$$

3) Neutro: pro ponomos

$$e \equiv 0.$$

$$\begin{aligned} (f + e)(x) &= f(x) + ex \\ &= f(x) + 0 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f + e = f //$$

4] inverso: sea f , pro ponomos

$$h(x) = -f(x),$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (f + h)(x) &= f(x) + h(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

es el inverso //

así, $(F(X, \mathbb{R}), +)$ es grupo abeliano
ahora basta verificar los
axiomas de ev.

para esto definimos la operación
estándar: $\lambda \in \mathbb{R}, f \in F(X, \mathbb{R})$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

es decir esa es nuestra ley
de composición externa.

Axioma $(\lambda + \beta)f = \lambda f + \beta f$

$$((\lambda + \beta)f)(x) = (\lambda + \beta)f(x)$$

estamos en $\mathbb{R}$ $\hookrightarrow = \lambda f(x) + \beta f(x)$

$$= (\lambda f)(x) + (\beta f)(x)$$

//

Ax2 $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$

$$(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f+g)(x)$$

$$\in \mathbb{R} \quad = \lambda(f(x)+g(x))$$

$$\quad = \lambda f(x) + \lambda g(x)$$

$$= (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x)$$

Ax3 $\lambda(Bf) = (\lambda B)f$

$$(\lambda(Bf))(x) = \lambda(Bf)(x)$$

$$= \lambda(Bf(x))$$

$$= (\lambda B)f(x)$$

$$\in \mathbb{R} \quad \hookrightarrow = (\lambda B)f(x)$$

A 841 $1 \circ f = f$

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) \stackrel{\rightarrow \text{en } \mathbb{R}}{=} f(x) //$$

$\therefore (\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +)$ es ev sobre $\mathbb{R}$

obs

em geral se $(Y, +)$ es sob $\mathbb{R}$

$K \Rightarrow (\mathcal{F}(X, Y), +)$ es sob $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ (a_m)_m \mid a_m \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N} \}$

- $(a_m)_m + (b_m)_m = (a_m + b_m)_m$

- $\lambda (a_m)_m = (\lambda a_m)_m$

pd q $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ es ev sob $\mathbb{R}$

1- $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ Grupo abeliano

a) conmutar

$$(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$$

$$\in \mathbb{R} \quad \Leftarrow \quad (b_n + a_n)_n \\ = (b_n)_n + (a_n)_n //$$

b) asociar

$$(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

$$(a_n)_n + ((b_n)_n + (c_n)_n)$$

$$= (a_n)_n + (b_n + c_n)_n$$

$$= (a_n + (b_n + c_n))_n$$

$$= (a_m + b_m) + c_m \rightarrow e_m \in \mathbb{R}$$

$$= (a_m + b_m)_m + (c_m)_m$$

$$= ((a_m)_m + (b_m)_m) + (c_m)_m //$$

c) neutro

proponemos $e_m = 0 \quad \forall m$

$$(a_m)_m + (e_m)_m = (a_m + e_m)_m$$

$$= (a_m + 0)_m$$

$$= (a_m)_m \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}} \right\} e_m \in \mathbb{R}$$

d) inverso

proponemos $b_m = -a_m$ como inverso de $(a_m)_m$

$$(a_m)_m + (b_m)_m = (a_m + b_m)_m = (-a_m + a_m)_m = (0_m)_m //$$

$\therefore (\mathbb{R}^n, +)$ grupo abeliano

axiomas en

Ax 1 $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

$$(\lambda + \beta)(a_m)_n = (\lambda + \beta)a_m)_n \quad // \text{ def}$$

$$= (\lambda a_m + \beta a_m)_n \quad // \text{ en } \mathbb{R}$$

$$= (\lambda a_m)_n + (\beta a_m)_n \quad // \text{ def}$$

$$= \lambda(a_m)_n + \beta(a_m)_n \quad // \text{ def}$$

Ax 2 $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ //

$$\lambda((a_m)_n + (b_m)_n) = \lambda(a_m + b_m)_n \quad // \text{ def}$$

$$= (\lambda(a_m + b_m))_n \quad // \text{ def}$$

$$= (\lambda a_m + \lambda b_m)_n \quad // \text{ en } \mathbb{R}$$

$$= (\lambda a_m)_n + (\lambda b_m)_n \quad // \text{ def}$$

$$= \lambda(a_m)_n + \lambda(b_m)_n \quad // \text{ def} //$$

A x 3 $\lambda(Bx) = (\lambda B)x$

$$\lambda(B(a_m)_m) = \lambda(Ba_m)_m \quad // \text{def}$$

$$= (\lambda(Ba_m))_m \quad // \text{def}$$

$$= (\lambda(B)a_m)_m \quad // \text{en } \mathbb{R}$$

$$= (\lambda B)(a_m)_m \quad // \text{def}$$

A x 4 $1 \cdot x = x$

$$1 \cdot (a_m)_m = (1 \cdot a_m)_m \xrightarrow{\text{en } \mathbb{R}} (a_m)_m //$$

o. $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ es ev sobre $\mathbb{R} //$

obs otra forma. Notar que:

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ $\therefore$ por la secuencia
lo pedido

c) Sea $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y K un cuerpo

$$GL(n, K) = \{ M \in M_{n,n}(K) \mid M \text{ es invertible} \}$$

entonces $GL(n, K)$ es e.v. con la multiplicación

Sol

De hecho, se me pasó al hacer el enunciado, $(GL(n, K), \cdot)$ no es grupo abeliano o no tamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Son distintas y esas matrices son invertibles.

al no ser grupo abeliano

$\Rightarrow$ no es e.v.

d) em $\mathbb{R}$ definimos

$$x * y = xy \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$k \times x = x^k \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Logo $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, *)$ es ev sobre $\mathbb{Z}$

1- $(\mathbb{R}, *)$ grupo abeliano

Comuta

$$x * y = xy \overset{\text{em } \mathbb{R}}{=} yx = y * x //$$

asocia

$$x * (y * z) = x * (yz) = x(yz)$$

$$= (xy)z \text{ em } \mathbb{R}$$

$$= (x * y)z$$

$$= (x * y) * z //$$

neutro

$$e = 1$$

$$x * e = xe = x \cdot 1 = x$$

inverso

$$h = x^{-1}$$

$$x * h = x x^{-1} = 1 = e //$$

$(\mathbb{R}_+, *)$ es ev.

Obs

Formalmente hay que mostrar
que $*$ es ley de composición
asociativa. Es decir

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, x * y \in \mathbb{R}_+$$

lo cual se hereda del producto
de reales positivos

акога axiomas ev

Ax1 $(\lambda + \beta) \times x = \lambda \times x + \beta \times x$

$$\begin{aligned} (\lambda + \beta) \times x &= x^{\lambda + \beta} = x^{\lambda} \cdot x^{\beta} = x^{\lambda} + x^{\beta} \\ &= (\lambda \times x) + (\beta \times x) // \end{aligned}$$

Ax3 $\lambda \times (x + y) = (\lambda \times x) + (\lambda \times y)$

$$\begin{aligned} \lambda \times (x + y) &= (x + y)^{\lambda} \\ &= (xy)^{\lambda} \\ &= x^{\lambda} y^{\lambda} \\ &= x^{\lambda} + y^{\lambda} \\ &= (\lambda \times x) + (\lambda \times y) // \end{aligned}$$

$$\underline{A \times 3} \quad 1 \times (B \times X) = (1B) \times X$$

$$\begin{aligned} 1 \times (B \times X) &= 1 \times (X^B) \\ &= (X^B)^1 \\ &= X^{1B} \\ &= (1B) \times X // \end{aligned}$$

$$\underline{A \times 4}$$

$$1 \times X = X^1 = X //$$

$$\therefore \underline{e} \rangle ev$$

e) Sea $n \geq 1$ y $m \geq 1$

$(M_{n,m}(K), +)$ es el v. sobre K

$(M_{n,m}(K), +)$ grupo abeliano

1- Comutativa

$$A, B \in M_{n,m}$$

$$A + B = B + A \quad \checkmark \quad (\forall a \text{ lo sabemos})$$

2- Asociatividad

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad (\forall a \text{ lo sabemos}) \quad \checkmark$$

3- neutro

$$A + O_{m,m} = A \quad , \quad (\forall a \text{ lo sabemos})$$

4- inverso

$$B = -A$$

$$A + B = A - A = O \quad \checkmark \quad (\forall a \text{ lo sabemos})$$

∴ (Ya sabemos) que

$(M_{n,m}(K), +)$ es grupo abeliano.
ahora veamos los axiomas

Ax1 $(\lambda + \beta) \cdot x = \lambda x + \beta x$

$(\lambda + \beta)M = \lambda M + \beta M \rightarrow$ Ya lo sabemos

Ax2 $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

$\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N \rightarrow //$

Ax3

$\lambda(\beta x) = (\lambda \beta)x$

$\lambda(\beta M) = (\lambda \beta)M \rightarrow$ Ya lo sabemos

Ax4 $1 \cdot x = x$

$1 \cdot M = M \rightarrow$ Ya lo sabemos

$(M_{n,n}(K), +)$ es ev sobre K

[en realidad lo sabemos, pero como lo sabemos]

P2 Muestre que los siguientes conjuntos, con sus operaciones, son sev

a) Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo y K cuerpo

Se define $V(n, K) = \{M \in M_{n,n}(K) \mid$
 V sea invertible y triangular superior y
entonces $(V, +)$ es sev de $(GL(n, K), +)$

sol

1- no puede ser sev de algo
que no es ev

2- tampoco es ev por
no conmutar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y vemos que son distintos.

$\therefore$ no es grupo abeliano

$\Rightarrow$ no es ev

b) $(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}), +)$ polinomios de grado a lo mas m son sev de $(\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +)$

Usamos la caracterización de sev

$$1) (\mathcal{P}_m(\mathbb{R}), +) \subseteq (\mathcal{F}(X, \mathbb{R}), +)$$

es directo, ya que los polinomios son funciones.

$$U \neq \emptyset$$

claramente $P(x) = 0 \forall x$ es
un polinomio $\therefore$ es no vacío.

$$\bullet \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall P, q \in P_m(\mathbb{R}), \lambda P + q \in P_m(\mathbb{R})$$

suma de polinomios. Siguiendo siendo
polinomio. basta ver que sea
a lo mas grado m .

$$P(x) = \sum_{n=0}^m a_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^m b_n x^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\lambda P + q)(x) &= \lambda \sum_{n=0}^m a_n x^n + \sum_{n=0}^m b_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^m \lambda a_n x^n + b_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^m (\lambda a_n + b_n) x^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda P + q \in P_m(\mathbb{R}) \therefore \text{es ser}$$

c) sea $M \in M_{m,m}(\mathbb{R})$

$V(M) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Mx = 0\}$ es
se v de $\mathbb{R}^m$.

Por $P_1) \in \mathbb{R}^m = M_{m,1}$ es

ev. así usemos la caracterización

1) $V(M) \subseteq \mathbb{R}^m$

Por definición del conjunto.

2) $V(M) \neq \emptyset$

notamos $Mx=0$ siempre tiene

la solución $x=0$. $0 \in V(M)$

3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V(M) \quad \lambda x + y \in V(M)$

podr $M(\lambda x + y) = 0$, sabiendo $Mx=0$
 $My=0$

$$M(\lambda x + y) = M(\lambda x) + My$$

$$= \lambda(Mx) + My = \lambda \cdot 0 + 0 = 0 //$$

∴ Concluimos que $V(M)$ es sev //

P3 y P4

me comentaron que el profe
no alcanzó a pasarlo, así que
lo veremos el próximo aux.

P5

Sea V un ev sobre K y sean

$S, T \text{ sev de } V$

a) Demuestre que

$S \cup T$ es un sev de V si $S \cap T \subseteq S$

⇐ por simetría basta ver un
caso

Si $S \subseteq T \Rightarrow T \cup S = T \rightarrow \text{es } \text{sev}$ //

⇒ sea $S \cup T \text{ sev de } V$ p.d.
 $S \cap T \subseteq S$

SUT es sev

$\therefore \forall x, y \in \text{SUT}, \forall \lambda \in K \quad \lambda x + y \in \text{SUT}$

Por contra, dirección es de lin

$S \neq T$ y $T \neq S$ $\therefore$

$\exists \bar{x} \in T \setminus S$ y $\exists \bar{y} \in S \setminus T$

$\Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in \text{SUT}$

$\Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in S$ ó $\bar{x} + \bar{y} \in T$

$\Rightarrow (\bar{x} + \bar{y}) - \bar{y} \in S$ ó $(\bar{x} + \bar{y}) - \bar{x} \in T$
 $\downarrow$
 $\in_S$ $\in_S$ $\in_T$ $\in_T$

Por SUT sev

$\Rightarrow \bar{x} \in S$ ó $\bar{y} \in T$

pero $\bar{x} \in T \setminus S$ y $\bar{y} \in S \setminus T$

$\Rightarrow \bar{x} \in S \cap (T \setminus S)$ ó $\bar{y} \in T \cap (S \setminus T)$

$\Rightarrow \bar{x} \in \emptyset$ ó $\bar{y} \in \emptyset \Rightarrow //$

a) concluimos $S \cap T \subseteq V$

$$\Rightarrow S \cap T \subseteq S$$

b) Podr $S \cap T$ es $S \cap T \subseteq V$

Veamos la caracterización

$$1) S \cap T \subseteq V$$

Como $S \cap T \subseteq T \subseteq V$ $\Rightarrow T \subseteq V$ //

$$2) S \cap T \neq \emptyset$$

Como $S \subseteq V \Rightarrow 0 \in S$, basta

mostrar que $\lambda u + v \in S$ y $u = v, \lambda = -1$

análogo para T $\therefore 0 \in S \cap T$

$$\Rightarrow S \cap T \neq \emptyset$$

$$3) \text{ Podr } \forall \lambda \in K, \forall u, v \in S \cap T \quad \lambda u + v \in S \cap T$$

$$\text{Si } u, v \in S \cap T \Rightarrow \begin{cases} \lambda u + v \in S \\ \lambda u + v \in T \end{cases} \text{ Por } S, T \subseteq V$$

$$\Rightarrow \lambda u + v \in S \cap T //$$

P6]

Sea E un seV sobre K . En

$E \times E$ se definen las siguientes
operaciones

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$

$$\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$$

a) pruebe que $E \times E$, con las
operaciones anteriores, es un
espacio vectorial sobre K

1 - $(E \times E, +)$ grupo abeliano

a) conmuta

$$(u, v), (u', v') \in E \times E$$

$$(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$$

$$= (u' + u, v' + v) \text{ / aqui estamos en } E \text{ que es } \text{ev} //$$

$$= (u', v') + (u, v) //$$

b) asociatividad

$$(u, v), (x, y), (a, b) \in E \times E$$

$$(u, v) + ((x, y) + (a, b))$$

$$= (u, v) + (x+a, y+b)$$

$$= (u + (x+a), v + (y+b))$$

$$= ((u+x)+a, (v+y)+b) / \text{Por } E \in \mathbb{R}$$

$$= (u+x, v+y) + (a, b)$$

$$= ((u, v) + (x, y)) + (a, b) //$$

c) Neutro

demostrando como '0' al neutro de E
 proponemos como '0' de $E \times E$ a
 $(0, 0)$

$$(u, v) + (0, 0) = (u+0, v+0) \overset{0 \in E}{=} (u, v) //$$

d) Inverso

Para $(u, v) \in E \times E$, proponemos

$(-u, -v)$ como el inverso, donde

$-u, -v$ son los inversos en E

$$(u, v) + (-u, -v) = (u - u, v - v)$$

$$= (0, 0) //$$

$\therefore (E \times E, +)$ es grupo abeliano

ver). Fijemos los axiomas de ev

AX 1 $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

$$(\lambda + \beta)(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} ((\lambda + \beta)u, (\lambda + \beta)v)$$

por estar $\hookleftarrow$

$$\text{en } E, \underline{ev} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda u + \beta u, \lambda v + \beta v)$$

en

$$\stackrel{\text{def 4}}{\hookleftarrow} (\lambda u, \lambda v) + (\beta u, \beta v)$$

def

$$\hookleftarrow \lambda \cdot (u, v) + \beta(u, v) //$$

A x 2 $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$

$$\lambda((u,v) + (a,b))$$

$$= \lambda((u+a, v+b)) \quad / d \in F$$

$$= (\lambda(u+a), \lambda(v+b)) \quad / d \in F$$

$$= (\lambda u + \lambda a, \lambda v + \lambda b) \quad / \in ev$$

$$= (\lambda u, \lambda v) + (\lambda a, \lambda b) \quad / d \in F$$

$$= \lambda(u, v) + \lambda(a, b) \quad / d \in F$$

A x 3 $\lambda(Bx) = (\lambda B)x$

$$\lambda(B(u,v)) = \lambda(Bu, Bv) \quad / d \in F$$

$$= (\lambda(Bu), \lambda(Bv)) \quad / d \in F$$

$$= ((\lambda B)u, (\lambda B)v) \quad / \in ev$$

$$= (\lambda B)(u, v) \quad / d \in F //$$

$$\underline{A \times 4} \quad 1 \cdot x = x$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot (u, v) &= (1 \cdot u, 1 \cdot v) / \text{def} \\ &= (u, v) / \text{EEV} // \end{aligned}$$

$\therefore (E \times E, +)$ es EV sobre K

Obs

Si $(E_k)_{k=0}^m$ es una colección

de EV sobre el mismo cuerpo K
es EV con las construcciones
dadas en la pregunta //

b) Considere los conjuntos

$$S = \{ (u, v) \in E \times E \mid u = v \}$$

$$\bar{S} = \{ (u, v) \in E \times E \mid u = -v \}$$

son subv de $E \times E$

obs

mostharemos solamente el caso δ . debido a que

$$(u, v) \in \delta \text{ ssi } (u, -v) \in \bar{\delta}$$

entonces todo lo que

cumpla δ basta para probarlo
por $(u, -v)$ y lo va a cumplir $\bar{\delta}$

$$1) \delta \subseteq E \times E$$

$$\rho \cap \delta \neq \emptyset$$

$$2) \delta \neq \emptyset$$

$$\text{basta tomar } (0, 0), 0 = 0 \therefore (0, 0) \in \delta$$

$$3) \forall \lambda \in K, \forall (u, v), (a, b) \in \delta$$

$$\Rightarrow \lambda(u, v) + (a, b) \in \delta$$

$$\lambda(u, v) + (a, b)$$

$$= (\lambda u + a, \lambda v + b) \quad / \quad \text{poner en } E \times E$$

$$\text{hasta ver } \lambda u + a \geq \lambda v + b$$

$$\lambda u + a = \lambda v + b \quad (\text{como } (u, v) \in \delta$$

$$u = v$$

$$(a, b) \in \delta$$

$$a = b$$

$\therefore \delta$ es seV

analogamente $\bar{\delta}$ es seV //

$$[\bar{\delta} \subseteq E \times E \text{ por def, } (0, 0) \in \delta \Rightarrow (0, 0) \in \bar{\delta} : \bar{\delta} \neq \emptyset$$

$$\lambda u + a \geq \lambda(-v) + (-b) = -(\lambda v + b) \quad \text{si}$$

$$(a, b), (u, v) \in \delta \quad \therefore \text{es seV}]$$

P71

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$V_\alpha = \{ p \in P_4(\mathbb{R}) \mid \text{con } p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

$$| a = \alpha, b = d, a + b + c + d = \alpha \}$$

Por q V_α es subv. s; $\alpha = 0$

Ej 1) $V_0 \subseteq P_4(\mathbb{R})$ por def.

2) $V_0 \neq \emptyset$

Tomamos $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4$
es elemento de V_0

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, $p, q \in V_0$ por q

$$(\lambda p + q) \in V_0$$

es obvio si $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

$$q(x) = \bar{a} + \bar{b}x + \bar{c}x^2 + \bar{d}x^3 + \bar{e}x^4$$

$$\Rightarrow (\lambda p + q)(x)$$

$$= (\lambda a + \bar{a}) + (\lambda b + \bar{b})x + (\lambda c + \bar{c})x^2 + (\lambda d + \bar{d})x^3 + (\lambda e + \bar{e})x^4$$

asi hay que ver

$$\lambda a + \bar{a} = \lambda e + \bar{e} \quad (1)$$

$$\lambda b + \bar{b} = \lambda d + \bar{d} \quad (2)$$

$$(\lambda a + \bar{a}) + (\lambda b + \bar{b}) + (\lambda c + \bar{c}) + (\lambda d + \bar{d}) + (\lambda e + \bar{e}) = 0$$

1) 2) Se cumplen por que como

$$p, q \in V_0 \quad a=e, b=d$$

$$\bar{a}=\bar{e}, \bar{b}=\bar{d}$$

ahora

$$(\lambda a + \bar{a}) + (\lambda b + \bar{b}) + (\lambda c + \bar{c}) + (\lambda d + \bar{d}) + (\lambda e + \bar{e})$$

$$= \lambda(a+b+c+d+e) + (\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}+\bar{e})$$

$$\stackrel{\substack{\lambda \in \mathbb{F} \\ p, q \in V_0}}{=} \lambda \cdot 0 + 0 = 0 \quad \therefore \lambda p + q \in V_0$$

así v_α es sev de $P_4(\mathbb{R})$ //

$\Rightarrow$

si v_α es sev $\Rightarrow P(x) = 0 \quad \forall x$ siempre
que pertenezca a v_α así

$$P(x) = 0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4$$

$$\Rightarrow 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = \alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 0$$

Obs | si v es sev de E
el 0 de E está en v .

P81

$$\text{Sea } U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

pd 4 Sean $S \in V$ de $M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$\text{Sean } A_1 = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$$

$$\text{pdg. } \alpha A_1 + A_2 \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 & d_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha c_1 + c_2 & \alpha d_1 + d_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \quad \Leftrightarrow \uparrow V$$

$$\text{Como } c_1, c_2 \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha c_1 + c_2, \alpha d_1 + d_2 \in \mathbb{R}$$

pd: gracias a un aux de intro al calculo
del semestre pasado por su aporte

!)

Obs $V \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$ no def

Obs.
 $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V \right)$
 $V \neq \emptyset$

Para U , $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$. $U \neq \emptyset$ y $U \subseteq M_{\mathbb{R}, 2}$
así, fattavor que

$$A, B \in U$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$\text{Sea } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$pdq$$

$$\alpha A + B \in U$$

$$\alpha A + B = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ -\alpha b & \alpha a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + c & \alpha b + d \\ -\alpha b - d & \alpha a + c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + c & \alpha b + d \\ -(\alpha b + d) & \alpha a + c \end{pmatrix} \in U$$

$\therefore V$ es subespacio de $M_{2,2}$ //

Pg

Sea $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ considere el
espacio de los polinomios con grado
menor o igual a m . $P_m(\mathbb{R})$

Sea $V = \{p \in P_m(\mathbb{R}) \mid \forall i \in \{2, \dots, m\} \quad a_i = a_{m-i}\}$

pregunta es si V es subespacio

1) $V \subseteq P_m(\mathbb{R})$ por definición

2) $V \neq \emptyset$ basta tomar $p(x) = 0$ //

3) si $p, q \in V, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda p + q \in V$

$$(\lambda p + q)(x) = \sum_{k=0}^m (\lambda a_k + b_k) x^k$$

$$\text{donde } p(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$$

$$q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

así $p \mid q$

$$1. \quad \wedge a_k + b_k = \wedge a_{m-k} + b_{m-k}$$

lo cual se tiene $p \mid q$

$$a_k = a_{m-k} \quad \wedge \quad b_k = b_{m-k}$$

[lo anterior para $p, q \in V$]

P_{10}

Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$V = \{ p \in P_3(\mathbb{R}) \mid p(x) = q(x)(x^2 + 5), \\ \text{para algún polinomio } q \}$$

Por $q \in V$ es $\text{se } V \text{ de } P_m(\mathbb{R})$

reconstruimos

$$q \mid p = q \mid q + 2$$

$$\text{Si } q \mid p \leq 3 \Rightarrow q \mid q \leq 1$$

$$\Rightarrow q = ax + b$$

así

$$p \in V \text{ si } p(x) = (ax+b)(x^2+5) \\ = ax^3 + bx^2 + 5ax + 5b$$

$$1- \forall p \in P_3 \quad p \in V \text{ si } a=b=0$$

$$2- \underline{V \neq \emptyset} \quad \text{ basta tomar } a=b=0 \\ \text{ es decir } p=0$$

$$3- \underline{\forall \lambda \in \mathbb{R}, p, q \in V \Rightarrow \lambda p + q \in V}$$

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + 5ax + 5b$$

$$q(x) = cx^3 + dx^2 + 5cx + 5d$$

$$\lambda p + q = (\lambda a + c)x^3 + (\lambda b + d)x^2 \\ + 5(\lambda a + c)x + 5(\lambda b + d)$$

que es de la forma pedida

$\therefore V$ es subespacio

P11

Sea $M_{2,2}(\mathbb{R})$. se define

$$W_1 = \{ A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0 \}$$

$$W_2 = \{ A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \mid \text{traza}(A) = 0 \}$$

pd q W_1, W_2 son subespacios de $M_{2,2}$

1) $W_1 \subseteq M_{2,2}, W_2 \subseteq M_{2,2}$, por def.

2) $W_1 \neq \emptyset, W_2 \neq \emptyset$, basta tomar

la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

3) $\forall \lambda, A, B \in W_1 \Rightarrow \lambda A + B \in W_1$

$$A = (a_{ij}) \Rightarrow a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0$$

$$B = (b_{ij}) \Rightarrow b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = 0$$

$$(\lambda A + B)_{ij} = \lambda a_{ij} + b_{ij}$$

∴ Po Q

$$\lambda a_{11} + b_{11} + \lambda a_{12} + b_{12} + \lambda a_{21} + b_{21} + \lambda a_{22} + b_{22} = 0$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 (\lambda a_{ik} + b_{ik}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \lambda a_{ik} + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 b_{ik}$$

$$= \lambda \cdot \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ik} + 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{po} \\ \text{hip} \end{array} \right)$$

$$= 0 //$$

∴ w_1 es sev

Seam $A, B \in W_2$ Po Q $\lambda A + B \in W_2$

$$\text{i.e. } \text{Traza}(A) = \text{Traza}(B) = 0$$

$$\text{Po Q } \text{Traza}(\lambda A + B) = 0$$

$$\text{Traza}(\lambda A + B) = \lambda \text{Traza}(A) + \text{Traza}(B)$$

$$= \lambda \cdot 0 + 0$$

$$= 0 //$$

∴ w_2 es sev

P121

em $\mathbb{R}^2$ de finimos nuevas operaciones

$$(u, v) \oplus (u', v') = (u + u' - 2, v + v' - 1)$$

$$\lambda(u, v) = (\lambda(u - 2), \lambda(v - 1)) \oplus (2, 1)$$

Pod q $\mathbb{R}^2$ com esta operaci3n es EV.

1- $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ abeliano

a) comutativo

$$\begin{aligned} (u, v) \oplus (u', v') &= (u + u' - 2, v + v' - 1) \\ &= (u' + u - 2, v' + v - 1) \quad \leftarrow \text{em } \mathbb{R} \\ &= (u', v') \oplus (u, v) // \end{aligned}$$

asociatividad

$$(u, v) \oplus ((u', v') \oplus (x, y))$$

$$= (u, v) \oplus (u' + x - 2, v' + y - 1)$$

$$= (u + (u' + x - 2) - 2, v + (v' + y - 1) - 1)$$

$$= ((u + u' - 2) + x - 2, (v + v' - 1) + y - 1) \quad \downarrow \text{asociatividad}$$

$$= ((u + u' - 2), v + v' - 1) \oplus (x, y)$$

$$= ((u, v) \oplus (u', v')) \oplus (x, y) //$$

Neutro

queremos

$$(x, y) \oplus (e_1, e_2) = (x, y)$$

$$(x + e_1 - 2, y + e_2 - 1) = (x, y)$$

$\therefore e_1 = 2, e_2 = 1$ son los inversos //

inverso

queremos

$$(x, y) \oplus (h_1, h_2) = (2, 1)$$

$$(x + h_1 - 2, y + h_2 - 1) = (2, 1)$$

$$\therefore h_1 = 4 - x$$

$$h_2 = 2 - y$$

son los inversos //

as: $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ es grupo abeliano
 hasta previsor los axiomas de ev.

A x 1.

$$(\lambda + \beta)x = \lambda x \oplus \beta x$$

$$(\lambda + \beta)(x, y)$$

$$= ((\lambda + \beta)(x - z), (\lambda + \beta)(y - 1)) + (z, 1) \quad \left. \vphantom{((\lambda + \beta)(x - z), (\lambda + \beta)(y - 1))} \right\} \text{def}$$

$$= (\lambda(x - z) + \beta(x - z), \lambda(y - 1) + \beta(y - 1)) + (z, 1)$$

$$= (\lambda(x - z) + \beta(x - z) + z - z, \lambda(y - 1) + \beta(y - 1) + 1 - 1) + (z, 1)$$

$$= (\lambda(x - z), \lambda(y - 1)) \oplus (\beta(x - z) + z, \beta(y - 1) + 1) + (z, 1)$$

$$= (\lambda(x - z), \lambda(y - 1)) + (z, 1) \oplus (\beta(x - z) + z, \beta(y - 1) + 1)$$

$$= \lambda(x, y) \oplus (\beta(x - z) + z, \beta(y - 1) + 1)$$

$$= \lambda(x, y) \oplus [(\beta(x - z), \beta(y - 1)) + (z, 1)]$$

$$= \lambda(x, y) \oplus \beta(x, y) //$$

$$\underline{A \times Z}, \lambda[(x, y) \oplus (a, b)] = \lambda(x, y) \oplus (a, b)$$

$$\lambda[(x, y) \oplus (a, b)]$$

$$= \lambda(x + a - z, y + b - 1)$$

$$= (\lambda(x + a - z - z), \lambda(y + b - 1 - 1)) + (z, 1)$$

$$= (\lambda(x - z) + \lambda(a - z), \lambda(y - 1) + \lambda(b - 1)) + (z, 1)$$

$$= (\lambda(x - z) + \lambda(a - z) + z, \lambda(y - 1) + \lambda(b - 1) + 1)$$

$$= ((\lambda(x - z) + z) + (\lambda(a - z) + z) - z, (\lambda(y - 1) + 1) + (\lambda(b - 1) + 1))$$

$$= (\lambda(x - z) + z, \lambda(y - 1) + 1) \oplus (\lambda(a - z) + z, \lambda(b - 1) + 1)$$

$$= ((\lambda(x-z), \lambda(y-1)) + (z, 1)) \oplus (\lambda(a-z), \lambda(b-1)) + (z, 1)$$

$$= \lambda(x, y) \oplus \lambda(a, b) //$$

Ax3 $\lambda(\beta x) = (\lambda \beta) x$

$$\lambda(\beta(x, y)) = \lambda[(\beta(x-z), \beta(y-1)) + (z, 1)]$$

$$= \lambda[(\beta(x-z) + z, \beta(y-1) + 1)]$$

$$= [\lambda(\beta(x-z) + z - z), \lambda[\beta(y-1) + 1 - 1]]$$

$$= [\lambda \beta$$

$$= [\lambda \beta(x-z), \lambda \beta(y-1)]$$

$$= (\lambda \beta)(x, y) //$$

Ax4 $1 \cdot x = x$

$$1 \cdot (x, y) = (1 \cdot (x-z), 1 \cdot (y-1)) + (z, 1)$$

$$= (x-z, y-1) + (z, 1)$$

$$= (x, y) //$$

1. es ev //