

Pauta AUX 3

P1 ver Pauta Aux 2

P2 La matriz $U \in M_{n,n}$ se dice unitaria si $U^T U = I_n$. Donde U^T es la Transpuesta de U .

a) Sean $U, U_1, U_2 \in M_{n,n}$ matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y que su inversa es unitaria. Además pruebe que $U_1 U_2$ es unitaria.

Sol

Como U es invertible tenemos que

$$U^T U = I_n, \text{ así sabemos}$$

que $U^{-1} = U^T$, ya que basta

que $AB = I$ para decir $A = B^{-1}$

Cuando A, B son cuadradas.
así nos basta ver que

$$(U^T)^T U^T = I$$

mostramos que $U = (U_{ij})$

$$\Rightarrow U^T = (U_{ji}) \quad (U^T)^T = (U_{ji}^T) \\ = (U_{ij})$$

$$\therefore (U^T)^T = U \quad \forall U \text{ matriz}$$

así

$$(U^T)^T U^T = U U^T$$

ahora U^T es la inversa de U

$$\therefore U U^T = U^T U = I$$

$$\text{así } (U^T)^T U^T = I \quad \therefore U^T \text{ es unitaria}$$

Por otro lado

$$U_1^T U_1 = I, \quad U_2^T U_2 = I$$

podríamos $(U_1 U_2)^T (U_1 U_2) = I$

$$(U_1 U_2)^T (U_1 U_2) \xrightarrow{(AB)^T = B^T A^T} = (U_2^T U_1^T) (U_1 U_2)$$

$$= U_2^T (U_1^T U_1) U_2 \quad / \text{asociatividad}$$

$$= U_2^T \cdot I \cdot U_2 \quad / U_1 \text{ unitaria}$$

$$= U_2^T U_2 = I \quad / U_2 \text{ unitaria}$$

$\therefore (U_1 U_2)$ es unitaria.

b) Sea $U \in M_{m,1}(\mathbb{R})$ (i.e. $U \in \mathbb{R}^m$)
est. q. $U^T U = I$. Pruebe q. e

$H = I_m - 2UU^T$ es unitaria

Sol 1. Proa $H^T H = I$

$$H^T = (I - 2UU^T)^T$$

$$= I^T - 2(UU^T)^T; \text{ 'T' se comporta } \\ \text{bien con la } \\ \text{suma}$$

$$= I - 2(U^T)^T U^T; I^T = I$$

$$= I - 2(UU^T); \text{ proo 1.}$$

a hora

$$H^T H = (I - 2UU^T)(I - 2UU^T)$$

$$= I \cdot I + I(-2UU^T) + (-2UU^T) \cdot I + (-2UU^T) \cdot (-2UU^T)$$

$$= I - 2UU^T - 2UU^T + 4UU^T UU^T$$

$$= I - 4UU^T + 4UU^T UU^T$$

$$= I - 4vv^T + 4v(v^T v)^{hip} v^T ; \text{ asociatividad}$$

$$= I - 4vv^T + 4vv^T$$

$$= I \quad \therefore H \text{ es unitaria.}$$

c) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y
 que para cualquier matriz $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$
 existe un $\theta \in \mathbb{R}$ t.q. la componente
 (coeficiente) $(2,1)$ de $G(\theta) \cdot A$ es
 0.

Sol Necesito mostrar que

$$(G(\theta))^T G(\theta) = I$$

$$(G(\theta))^T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{así } (G(\theta))^T G(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & 0 \\ 0 & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I //$$

Por otro lado

$$(G(\theta) \cdot A)_{2,1} \text{ cuando } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es

$$a_{11} \cdot \sin(\theta) + a_{21} \cdot \cos(\theta)$$

Queremos $a_{11} \sin(\theta) + a_{21} \cos(\theta) = 0$

Casos

$a_{11} = 0$

$\Rightarrow a_{21} \cos(\theta) = 0$

Tomamos $\theta = \frac{\pi}{2}$

$a_{11} \neq 0$

$\Rightarrow a_{11} \sin(\theta) = -a_{21} \cos(\theta)$

$\Rightarrow \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$

$\Rightarrow \tan(\theta) = -\frac{a_{21}}{a_{11}}$

$\Rightarrow \theta = \arctan\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$

d) Demuestre $(G(\theta))^{-1} = G(-\theta)$
 Veamos $G(\theta) \cdot G(-\theta)$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

Paridad

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Paridad y c

$$= G(\theta) \cdot (G(\theta))^T = I$$

//

P3

a) Sea A la matriz cuadrada de 3×3 dada por $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pruebe que A es invertible

ssi $a^2 \neq 1$ y calcule su inversa

Sabemos que A es invertible
ssi en la diagonal de
la matriz es llamada
no hay ceros. Así
basta estudiar el esca-
lamiento.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\downarrow F_3 = F_3 - aF_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & -a & 0 & 1 \end{array} \right)$$

así A^{-1} existe ssi $1 \cdot 1 \cdot (1-a^2) \neq 0$
ssi $1 \neq a^2 //$

ahora terminando el método
de gauss:

$$\checkmark f_3' = \frac{1}{1-a^2} f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{1-a^2} & 0 & \frac{1}{1-a^2} \end{array} \right)$$

$$\checkmark f_1' = f_1 - a f_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 + \frac{a^2}{1-a^2} & 0 & -\frac{a}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{a}{1-a^2} & 0 & \frac{1}{1-a^2} \end{array} \right)$$

as,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-a^2} & 0 & -\frac{a}{1-a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{a}{1-a^2} & 0 & \frac{1}{1-a^2} \end{pmatrix} //$$

b) Sea la matriz a coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$

Demuestre que si la matriz es invertible entonces $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$

Sol:

estudiamos el escalonamiento

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{f_2' = f_2 - af_1 \\ f_3' = f_3 - a^2 f_1}]{\substack{f_2' = f_2 - af_1 \\ f_3' = f_3 - a^2 f_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{pmatrix}$$

$$f_3' = f_3 - (b+a)f_2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c^2-a^2) - (b+a)(c-a) \end{pmatrix}$$

así como A es invertible sabemos

$$(b-a)(c^2-a^2-(b+a)(c-a)) \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$(b-a)((c-a)(c+a)-(b+a)(c-a)) \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$(b-a)(c-a)(c+a-(b+a)) \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$(b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

$\Rightarrow$

$$b-a \neq 0 \rightarrow b \neq a$$

$$c-a \neq 0 \rightarrow c \neq a$$

$$c-b \neq 0 \rightarrow c \neq b$$

P4

a) considere $U, V \in M_{m,1} \setminus \{0\}$
Se define la matriz $A = UV^T$.

1) Pruebe que $\forall x \in M_{m,1}$ $Ax = 0$ si y
solo si $V^T x = 0$ Indicación: $V^T x \in \mathbb{R}$

Sol

$$\Rightarrow V^T x = 0 \Rightarrow U(V^T x) = 0$$

$$\Rightarrow (UV^T)x = 0, \text{ asociatividad}$$

$$\Rightarrow Ax = 0 \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow (UV^T)x = 0$$

$$\Rightarrow U(V^T x) = 0; \text{ por indicación}$$

$$\lambda = V^T x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow U \cdot \lambda = 0 \quad \underline{\text{así}} \text{ si } \lambda \neq 0$$

$$\Rightarrow (01) \cdot \frac{1}{1} = 0$$

$$\Rightarrow v \geq 0 \rightarrow \infty \quad v \neq 0$$

$$\text{as } \lambda = 0 \Rightarrow v^T x = 0 //$$

2)

En cuanto al método de Variables libres en la resolución del sistema $Ax=0$, ¿es A invertible?

Por 1)

$$Ax=0 \text{ ss } v^T x=0$$

$$(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0$$

$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_m x_m = 0$$

Como $\exists v_i$ t.q. $v_i \neq 0$, por

$$v \neq 0$$

así

$$v_i x_i = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m v_k x_k$$

$$\Rightarrow x_i = - \frac{1}{v_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m v_k x_k, \text{ así hay}$$

$n-1$ variables libres
 en particular existe
 más de una solución para
 el sistema $Ax=0$

$\Rightarrow$ A no es invertible Σ

b) considere las matrices
cuadradas $A, B \in M_{n,n}$ Demuestre
que

1) A es invertible ssi AA^T es invertible

Sol

$\Rightarrow$ pda $\exists B \neq 0$

$$AA^T B = I$$

ahora si A^{-1} es invertible

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \text{ así}$$

$$A^{-1}(AA^T B) = A^{-1} I$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1} A) A^T B = A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow A^T B = A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (A^T)^{-1} A^T B = (A^T)^{-1} A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow B = (A^{-1})^T A^{-1} \checkmark$$

$$\therefore (AA^T)^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1}$$

$$\subseteq (AA^T)^{-1} \text{ existe}$$

así buscamos B 1.º

$$AB = I$$

$$\Rightarrow (AA^T)(AA^T)^{-1} = I$$

$$A(A^T(AA^T)^{-1}) = I, \text{ por asoc.}$$

$$\therefore A^{-1} = A^T(AA^T)^{-1} //$$

$$2] \text{ Si } A^2 = A \text{ y } B = I - A \Rightarrow B^3 = B$$

$$B^3 = (I - A)(I - A)(I - A)$$

$$= (I - A)(I - A - A + A^2)$$

$$= (I - A)(I - A - \cancel{A} + \cancel{A})$$

$$B^3 = (I - A)(I - A)$$

$$= I - A - A + A^2$$

$$= I - A - A + A = I - A = B //$$

3] Asuma que la matriz
 A es invertible y con las
 condiciones de la parte
 2 calcule A y B .

Sol]

$$A^2 = A, \quad B = I - A$$

$$A^2 = A \Rightarrow A^{-1}(A^2) = A^{-1}A = I$$

$$\Rightarrow A^{-1}AA = I$$

$$\Rightarrow A = I \Rightarrow B = 0 //$$

P5]

Sean $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{m,n}$ T q
 $AB = I$

a) Demuestre que cuando
A es simétrica entonces B
también lo es

Sol]

pd q si $A^T = A$ y $B^T = B$

así:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$\text{así vez } AB = I \Rightarrow (AB)^T = I$$

$$\Rightarrow B^T A^T = I$$

↓ simétrica

$$\Rightarrow B^T A = I \quad AB = I$$

$$\Rightarrow B^T AB = B \Rightarrow B^T = B //$$

b) Demuestre que A no
tiene filas repetidas.

sol

Si tuviera $\exists i, j \neq i$

$$A_i = A_j \text{ pero } i \neq j$$

ahora

$$0 = (AB)_{pk}, \text{ por } AB = I \quad \forall p \neq k$$

ahora $(AB)_{pk}$ lo interpretemos

como la fila p de A

por la columna k de B

así

$$0 = A_{p \cdot} B_{\cdot k} \quad \forall p \neq k \text{ Tomando}$$
$$p = i$$
$$k = j$$

$$0 = A_{i0} \cdot B_{0j}$$

$$= A_{j0} \cdot B_{0j} \rightarrow \text{Hilf}$$

$$= (AB)_{jj} \quad \left. \vphantom{(AB)_{jj}} \right\} AB = I$$

$$= 1$$

$\rightarrow \leftarrow$

$\therefore A$ no tiene filas repetidas.

P6]

Sea $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ t.q. $(I_m - A)$ es invertible

a) Probar que

$$(I_m + A)(I_m - A)^{-1} = (I_m - A)^{-1}(I_m + A)$$

Indicación: multiplique

$$\text{por } (I_m - A)^{-1}$$

$$(I_m + A)(I_m - A)^{-1} = (I_m - A)^{-1}(I_m + A)$$

SSI

$$(I_m - A)(I_m + A)(I_m - A)^{-1} = (I_m - A) \overset{I}{(I_m - A)^{-1}} (I_m + A) = (I_m + A)$$

SSI

$$(I_m - A)(I_m + A)(I_m - A)^{-1} \cdot (I_m - A) = (I_m + A)(I_m - A)$$

SSI

$$(I_m - A)(I_m + A) = (I_m + A)(I_m - A)$$

SSI

$$I_m + A - A - A^2 = I_m - A + A - A^2$$

SSI

$$I - A^2 = I - A^2$$

SSI

$$0 = 0 \quad \text{SSI} \quad \checkmark$$

donde todos los pasos
son equivalentes por transformaciones
elementales invertibles
inversas.

b) Suponiendo, además, que
 $A^T = -A$ pruebe que

$$BB^T = I \quad \text{donde} \quad B = (I + A)(I - A)^{-1}$$

sol.

$$\begin{aligned} B^T &= [(I + A)(I - A)^{-1}]^T \\ &= ((I - A)^{-1})^T (I + A)^T \\ &= [(I - A)^T]^{-1} (I^T + A^T) \\ &= [I - A^T]^{-1} (I + A^T) \\ &= [I + A]^{-1} (I - A) \end{aligned}$$

$$B B^T = (I+A)(I-A)^{-1} [(I+A)^{-1}(I-A)]$$

$$\stackrel{\text{por teq. a}}{=} (I-A)^{-1} (I+A) \underbrace{(I+A)^{-1}(I-A)}_{=I}$$

$$= (I-A)^{-1} \cdot I \cdot (I-A)$$

$$= (I-A)^{-1} (I-A) = I //$$

P=7]

a) B una matriz cuadrada cualquier, demuestre que

$B+B^T$ es simétrica y

$B-B^T$ antisimétrica

Sea),

$$(B+B^T)^T = B^T + (B^T)^T = B^T + B$$

$$\begin{aligned} (B-B^T)^T &= B^T - (B^T)^T = B^T - B \\ &= -(B-B^T) // \end{aligned}$$

b) muestre que toda matriz cuadrada se puede descomponer en una matriz simétrica K y una antisimétrica H .

Sol) Sea A matriz cuadrada.

Por lo tanto

$K = \frac{1}{2} (A + A^T)$ es simétrica

$H = \frac{1}{2} (A - A^T)$ es antisimétrica

y

$$A = K + H //$$

P8)

Sea $M \in M_{m,n}$ una matriz
tal que $(M^T M) \in M_{n \times n}$ es invertible

Definamos la matriz P por

$$P = I - M(M^T M)^{-1} M^T. \quad \text{Prove que}$$

a) $P^2 = P$. Calcule PM

Sol)

$$\begin{aligned} PP &= (I - M(M^T M)^{-1} M^T)(I - M(M^T M)^{-1} M^T) \\ &= I - M(M^T M)^{-1} M^T - M(M^T M)^{-1} M^T \\ &\quad + M(M^T M)^{-1} \cancel{(M^T M)}^I (M^T M)^{-1} M^T \\ &= I - M(M^T M)^{-1} M^T - \cancel{M(M^T M)^{-1} M^T} \\ &\quad + M(M^T M)^{-1} M^T \end{aligned}$$

$$= I - (M^T)^T ((M^T M)^{-1})^T M^T$$

$$= I - M (M^T M)^T^{-1} M^T$$

↓ transpuesto

$$= I - M (M^T M)^{-1} M^T$$

$$= \underline{\underline{P}}$$

c) pruebe que P no es invertible

sol

Si lo fuera

$$\Rightarrow PM = 0 \quad \therefore P^{-1}(PM) = 0$$

$$\Rightarrow M = 0 \quad \text{ahora}$$

$$M^T M = 0^T \cdot 0 = 0 \rightarrow \in \mathcal{P} \cap \mathcal{N}$$

enunciado M^TM es invertible

P91

considere el siguiente
lineal a coeficientes reales

$$-x_1 + \alpha x_3 + \beta x_4 = 0$$

$$x_2 + \alpha x_3 + \beta x_4 = 0$$

$$\alpha x_1 + \beta x_2 = 0$$

$$\beta x_1 + \beta x_2 + \alpha x_3 = 0$$

Determine las condiciones

sobre los parámetros

α y β garanticen que

el sistema tenga

solución única.

591

me basta ver la diagonal
de la matriz es calomado

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow f_3' = f_3 + \alpha f_1, f_4' = f_4 + \beta f_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ 0 & \beta & \alpha + \alpha\beta & \beta^2 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow F_3' = F_3 - \beta F_2, \quad F_4' = F_4 - \beta F_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha\beta & \alpha\beta - \beta^2 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Permutato fila 4 y 3

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha - \beta) & \beta(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

$$\downarrow F_4' = F_4 - (\alpha - \beta) F_3$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta(\alpha - \beta) \end{pmatrix}$$

as: quier

$$\alpha \beta (\alpha - \beta) \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0 \wedge \alpha \neq \beta //$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \alpha \neq \beta$$