MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 3 - Vamos Como Avión

P1. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ de existir calcule su inversa.

P2. ***P3 - C4 Algebra 2000***
La matriz $U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se dice unitaria si $U^T U = I_n$, donde U^T es la transpuesta de U.

a) Sean $U, U_1, U_2 \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ matrices unitarias. Pruebe que U es invertible y que su inversa es unitaria. Además, pruebe que U_1U_2 es unitaria.

b) Sea $u \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (es decir $u \in \mathbb{R}^n$) es tal que $u^T u = 1$. Pruebe que $H = I_n - 2uu^T$ es unitaria.

c) **[Propuesto]** Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Pruebe que $G(\theta)$ es unitaria y que cualquiera sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ existe un $\theta \in \mathbb{R}$ tal que la componente (coeficiente) (2,1) de $G(\theta)A$ es 0. **[Hint:]** Pongase en casos para algún coeficientes de A

d) **[Propuesto]** Demuestre que $(G(\theta))^{-1} = G(-\theta)$

P3. ***P1 (a) - C4 Algebra 2002*** y ***P3 (b) - C1 Lineal 2016-2***

a) Sea A la matriz cuadrada de 3×3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pruebe que A es invertible si y solo si $a^2 \neq 1$ y calcule su inversa.

b) **[Propuesto]** Sea la matriz a coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$. Demuestre que si la matriz es invertible entonces $(a \neq b) \wedge (a \neq c) \wedge (b \neq c)$

P4. ***P3 - C4 Algebra 2006***

a) Considere $u, v \in \mathcal{M}_{n,1} \backslash \{0\}$. Se define la amtriz $A \in \mathcal{M}_{nn}$ por $A = uv^T$.

1) Pruebe que $\forall x \in \mathcal{M}_{n,1}$ $Ax = 0 \iff v^T x = 0$ **Indicación:** Observe que $vTx \in \mathbb{R}$.
2) Encuentre el número de variables libres en la resolución del sistema $Ax = 0$. ¿Es A invertible?.

b) **[Propuesto]** Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}$. Demuestre que

1) A es invertible ssi AA^T es invertible
2) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$ entonces $B^3 = B$
3) Asuma que la matriz A es invertible y con las condiciones de la parte 2 calcule cuanto valen A y B.

P5. ***P1 - C1 Lineal 2018-1***
Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ tal que $AB = I_m$

a) Demuestre que cuando A es simetrica entonces B también lo es.

b) Demuestre que A no tiene filas repetidas.

P6. ***P3 (a) - C1 Lineal 2015-2***
Sea $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ tal que $(I_n - A)$ es invertible.

a) Probar que

$$(I_n + A)(I_n - A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$$

Indicación: Multiplique por $(I_n - A)$

b) Suponiendo, además, que $A^T = -A$ pruebe que $BB^T = I_n$ donde $B = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}$

P7. ***P3 (b) y (c) - C1 Lineal 2013-1, P3 (c) - C1 Lineal 2014-2***

a) Si B es una matriz cuadrada cualquiera, demuestre que $B + B^T$ es simétrica y que $B - B^T$ es anti-simétrica.

b) Muestre que toda matriz cuadrada se puede descomponer como la suma de una matriz simétrica K más una antisimétrica H.

c) Sean $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tales que A y B son simétricas y A es invertrible. Demuestre que $C^T(A^{-1} + B)C$ es simétrica.

P8. ***P2 (2) - C4 Algebra 2003***
Sea $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $(M^TM) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es invertible. Definamos la matriz $P \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$ como $P = I_m - M(M^TM)^{-1}M^T$ donde I_m es la matriz identidad de orden M. Pruebe que

a) $P^2 = P$. Calculé PM

b) Pruebe que la matriz M^TM es simétrica y muestre que la matriz P también es simétrica

c) Pruebe que P no es invertible.

P9. [**Propuesto**] ***P1 (a) - C1 Lineal 2011-2***
Considere el siguiente sistema lineal a coeficientes reales

$$\begin{array}{rrrrcl}
-x_1 & & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0\\
 & x_2 & +\alpha x_3 & +\beta x_4 & = & 0\\
\alpha x_1 & +\beta x_2 & & & = & 0\\
\beta x_1 & +\beta x_2 & +\alpha x_3 & & = & 0
\end{array}$$

Determine las condiciones sobre los parámetros reales α y β que garanticen que el sistema tenga una única solución.

Resumen

- [**Matriz traspuesta**] Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$, se define la **traspuesta** de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^T tal que $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.
  Esto corresponde a intercambiar el rol de filas y columnas.
- [**Propiedades**] Para $A, C \in \mathcal{M}_{mn}$, $B \in \mathcal{M}_{nm}$, $D \in \mathcal{M}_{nn}$
  - *a*) $(\lambda A + C)^T = \lambda A^T + C^T$
  - *b*) $(AB)^T = B^TA^T$
  - *c*) Si D es invertible $(D^{-1})^T = (D^T)^{-1}$
- [**Matriz simétrica**] Diremos que una matriz es simétrica si $A = A^t$.
- [**Matriz anti simétrica**] Diremos que una matriz es anit simétrica si $A^t = -A$.
- Si existe solución para el sistema $Ax = b$ y en la matriz escalonada $\tilde{A}$ existe algún cero en la diagonal entonces existe más de una solución.
- Si el sistema $Ax = b$ es tal que $n > m$ entonces tienen infinitas soluciones o ninguna.
- Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}$ las siguientes porposiciones son equivalentes.
  - *a*) A es invertible
  - *b*) $\forall b \in \mathbb{R}^n$, $Ax = b$ tiene solución única.
  - *c*) El sistema $Ax = 0$ tiene solución única.
  - *d*) No existen ceros en la diagonal escalonada.