MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 2 - Calentando motores

P1. Sea la matriz de coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ resuelva la ecuación $Ax = 0$. Donde $x \in \mathbb{R}^3$.

P2. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal en las variables x_1, x_2, x_3.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & \beta \\ 3x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 & = & 1 \end{array}$$

Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene

a) Una única solución *b)* Ninguna solución *c)* Infinitas soluciones

P3. Considere el siguiente sistema lineal en los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & 2x_1 & + & & 2x_3 & + & \alpha x_4 & = & -1 \\ & & - & x_2 & + & x_3 & + & (\alpha - \beta)x_4 & = & 1 \\ - & 2x_1 & - & x_2 & + & (2\alpha - 1)x_3 & + & (-\beta - 1)x_4 & = & 3 - \beta \\ & & & x_2 & - & x_3 & + & (\beta - 1)x_4 & = & 1 \\ & x_1 & + & & & x_3 & + & \frac{\alpha}{2}x_4 & = & 2\beta - \frac{3}{2} \end{array}$$

Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene

a) Una única solución *b)* Ninguna solución *c)* Infinitas soluciones

P4. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, encuentre las condiciones necesarias y suficientes para que A^{-1} exista y calculela.

P5. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

a) Probar que P es invertible y calcule P^{-1}
b) Probar que $A = PDP^{-1}$ y encontrar A^{10}

P6. Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, de existir, calcule su inversa.

P7. Sea $A \in \mathcal{M}_{mn}$ y $B \in \mathcal{M}_{nm}$ pruebe que:

a) $tr(AB) = tr(B^T A^T)$
b) $(AB)^T = B^T A^T$
c) **[Propuesto]** $(\lambda A + B)^T = \lambda A^T + B^T$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
d) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Donde $tr(A)$ es la traza de la matriz A, es decir, la suma de los elementos diagonales de A.

Resumen

- [**Matriz traspuesta**] Dada una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{mn}$, se define la **traspuesta** de A como aquella matriz de $n \times m$ que denotaremos por A^T tal que $(A^t)_{ij} = a_{ji}$.
  Esto corresponde a intercambiar el rol de filas y columnas.
- [**Matriz simétrica**] Diremos que una matriz es simétrica si $A = A^t$.
- [**Matriz anti simétrica**] Diremos que una matriz es anit simétrica si $A^t = -A$.
- [**Matriz de permutación**]: Se define la matriz elemental de permutación I_{pq} como la matriz que se construye a partir de la identidad, permutando las filas p y q.
- [**Permutación de filas y columnas**]: Dada una matriz elemental de permutación $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}$, $A \in \mathcal{M}_{nm}$ y $B \in \mathcal{M}_{sn}$ se tiene que:
  - $I_{pq}A$ corresponde a la matriz A con las filas p y q permutadas.
  - BI_{pq} corresponde a la matriz B con las columnas p y q permutadas.
- [**Matriz de suma**]: Se define la matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ como la que se construye a partir de la identidad, agregando λ a la posición (q, p) (columna p y fila q).
- [**Suma y ponderación de filas**]: Dada una matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ y una matriz $A \in \mathcal{M}_{nm}$ cualquiera, se tiene que:
  - Si $p < q$, $E_{p,q}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero en la fila q, se le suma la fila p multiplicada por λ, es decir:

$$E_{p,q}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{q\bullet} + \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

  - Si $p = q$, $E_{p,p}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero con la fila p ponderada por λ, es decir:

$$E_{p,p}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

- [**Inversa de la matriz de suma**]: $E_{p,q}(\lambda)$ es **invertible**. Su inversa es $E_{p,q}(\lambda)^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$
- [**Propiedad importante**]: Dada una matriz C invertible, se tiene que $a \in \mathbb{K}^n$ es solución de $Ax = b \iff a$ es solución de $(CA)x = Cb$.