MA1102-4 Álgebra Lineal
Profesor: Jaime San Martín.
Auxiliar: Sebastián Bustos

Auxiliar 1 - The Beginning

P1. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & -15 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ Calcule:

a) $A + B$

b) $-3A$

c) **[Propuesto]** $2A - 3B$

P2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule A^2, A^3, A^4.

b) **[Propuesto]** Proponga un valor para A^n con $n \in \mathbb{N}$ y demustre que, en efecto, es el resultado.

c) Demuestre que $A^{(n+m)} = A^n A^m$ para $n, m \in \mathbb{N}$ usando la parte b.

P3. Sean $A \in \mathcal{M}_{mn}$, $B \in \mathcal{M}_{nr}$, $C \in \mathcal{M}_{rp}$ y $D \in \mathcal{M}_{mn}$. Demuestre que:

a) $A(BC) = (AB)C$

b) **[Propuesto]** $(A + D)B = AB + DB$

P4. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}$ matrices

a) Si A, B triangulares superiores entonces $A + B$ es triangular superior.

b) Si A, B son invertibles demuestre que AB es invertible con inversa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

P5. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$

a) Si A verifica $A^3 + 3A^2 + 2I = 0$ pruebe entonces que A es invertible y encuentre su inversa.

b) Si existe $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $A^m = 0$. Probar que $I_n - A$ es invertible con inversa $I_n + A + A^2 + ... + A^{m-1}$ (I_n es la identidad de las matrices de tamaño $n \times n$)

P6. Sea la matriz de coeficientes reales $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ resuelva la ecuación $Ax = 0$. Donde $x \in \mathbb{R}^3$.

P7. Se define la función Traza (T) como $T(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ donde C es una matriz de $n \times n$ y $C = (c_{ij})$. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

a) Probar que $T(A + B) = T(A) + T(B)$

b) **[Propuesto]** Probar que $T(\lambda A) = \lambda T(A)$

c) Probar que $T(AB) = T(BA)$

d) Sea $P \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ invertible. Probar que $T(A) = T(PAP^{-1})$

e) Probar que $T(AA^T) \geq 0$ y que $T(AA^T) = 0 \iff A = 0$

P8. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y considere el siguiente sistema lineal en las variables x_1, x_2, x_3.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= \beta \\ 3x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Determine los valores de α y β para los cuales el sistema tiene

a) Una única solución *b*) Ninguna solución *c*) Infinitas soluciones

P9. **[Propuesto]** Sea $A \in \mathcal{M}_{mn}$. Identifique que representan las siguientes sumas y que condiciones deben cumplir m y n para que la sumatoria esté bien definida.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki}$

Resumen

- **[Producto de matrices]**: Dadas $A \in \mathcal{M}_{mr}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{rn}(\mathbb{K})$ se define el producto $C = AB$ como aquella matriz $C \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.$$

- **[Notación: filas y columnas]** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K})$ notaremos su i-ésima fila como:

$$A_{i\bullet} = (a_{i1}a_{i2}\dots a_{in})$$

y su j-ésima columna:

$$A_{\bullet j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

- **[Matriz invertible]**: Diremos que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ es **invertible** si y solo si $\exists B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$ tal que:

$$AB = BA = I$$

De existir B, esta es **única**. Así, anotamos $B = A^{-1}$.

- **[Matriz de permutación]**: Se define la matriz elemental de permutación I_{pq} como la matriz que se construye a partir de la identidad, permutando las filas p y q.
- **[Permutación de filas y columnas]**: Dada una matriz elemental de permutación $I_{pq} \in \mathcal{M}_{nn}$, $A \in \mathcal{M}_{nm}$ y $B \in \mathcal{M}_{sn}$ se tiene que:
  - $I_{pq}A$ corresponde a la matriz A con las filas p y q permutadas.
  - BI_{pq} corresponde a la matriz B con las columnas p y q permutadas.
- **[Matriz de suma]**: Se define la matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ como la que se construye a partir de la identidad, agregando λ a la posición (q, p) (columna p y fila q).
- **[Suma y ponderación de filas]**: Dada una matriz elemental de suma $E_{p,q}(\lambda) \in \mathcal{M}_{nn}$ y una matriz $A \in \mathcal{M}_{nm}$ cualquiera, se tiene que:
  - Si $p < q$, $E_{p,q}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero en la fila q, se le suma la fila p multiplicada por λ, es decir:

$$E_{p,q}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{q\bullet} + \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

  - Si $p = q$, $E_{p,p}(\lambda)A$ entrega la misma matriz A pero con la fila p ponderada por λ, es decir:

$$E_{p,p}(\lambda)A = \begin{pmatrix} A_{1\bullet} \\ \vdots \\ \lambda A_{p\bullet} \\ \vdots \\ A_{n\bullet} \end{pmatrix}$$

- **[Inversa de la matriz de suma]**: $E_{p,q}(\lambda)$ es **invertible**. Su inversa es $E_{p,q}(\lambda)^{-1} = E_{p,q}(-\lambda)$
- **[Propiedad importante]**: Dada una matriz C invertible, se tiene que $a \in \mathbb{K}^n$ es solución de $Ax = b$ $\iff$ a es solución de $(CA)x = Cb$.