Apuntes Aux 9

P1 Definamos $F(y) = \int_0^y f(x)dx - \int_y^b f(x)dx$

Por TFC (1ra versión) se tiene que las funciones $F_1(y) = \int_0^y f(x)dx$ y $F_2(y) = \int_y^b f(x)dx$ son continuas, por lo tanto, $F(y)$ es continua por composición de continuas.

Además, $F(0) = \cancel{\int_0^0 f(x)dx} - \int_0^b f(x)dx = -\int_0^b f(x)dx$

y $F(b) = \int_0^b f(x)dx - \int_b^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx$

$\Rightarrow F(0) = -F(b) \Rightarrow F(0)\cdot F(b) \leq 0$ y entonces por TVI

$\exists \xi \in [0,b]$ tq $F(\xi) = 0 \Rightarrow \int_0^\xi f(x)dx = \int_\xi^b f(x)dx$ ■

(obs: Necesitábamos que $F(\cdot)$ fuera continua para cumplir las hipótesis de TVI).

P2) (i) PDQ: $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\,dx\right| \leq \frac{\pi}{12e}$

Dem) En efecto,

$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\,dx\right| \leq \int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right| dx$$

$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$ prop del valor abs

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{|e^{-x}|\cdot|\operatorname{sen}(x)|}{|1+x^2|}\,dx$$

e^{-x}, $1+x^2$ son positivas siempre, $|e^{-x}| = e^{-x}$, $|1+x^2| = 1+x^2$

$$= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}|\operatorname{sen}(x)|}{1+x^2}\,dx$$

$|\operatorname{sen}(x)| \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\leq \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}}{1+x^2}\,dx$$

$f(x) = e^{x}$ es creciente $\Rightarrow f(-x) = e^{-x}$ es decreciente $\Rightarrow e^{-x} \leq e^{-y}$ si $y \leq x$ $\Rightarrow e^{-x} \leq e^{-1} \ \forall x \in [1, \sqrt{3}]$

$$\leq \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-1}}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{e}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$, entonces por TFC, $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)\Big|_1^{\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{e}\left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan(1)\right)$$

$$= \frac{1}{e}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{12e}$$

$$\therefore \left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\,dx \right| \leq \frac{\pi}{12e} \blacksquare$$

(ii) $f(x)$ derivable cumple que

$$\int_1^x f(t)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt + \int_0^{f(x)} \operatorname{sen}(\pi t)\,dt = \frac{1}{2\pi} \; ; \quad 0 < \overset{f(x)}{\overset{\shortparallel}{y}} < \frac{1}{2} \; . \; (1)$$

Calcular $f(1), f'(1)$.

$\underline{f(1)}|$ Evaluando la ecuación (1) en $x=1$, se tiene que

$$\cancel{\int_1^1 f(t)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt}^{\,0} + \int_0^{f(1)} \operatorname{sen}(\pi t) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow \int_0^{f(1)} \operatorname{sen}(\pi t) = \frac{1}{2\pi}$$

$\left| \int \operatorname{sen}(\pi t)\,dt = -\frac{\cos(\pi t)}{\pi} \right.$, usando TFC,

$$\Rightarrow \left(-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right)\Bigg|_0^{f(1)} = \frac{1}{2\pi}$$

$$\Rightarrow -\frac{\cos(\pi f(1))}{\cancel{\pi}} + \frac{\cancel{\cos(0)}^{\,1}}{\cancel{\pi}} = \frac{1}{2\cancel{\pi}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \cos(\pi f(1)) \Rightarrow \pi f(1) = \operatorname{ARCOS}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

ARCOS$\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
pero como $0 < f(x) < 1/2$
la única opción es
que sea $\pi/3$

$$\Rightarrow \boxed{f(1) = \frac{1}{3}}$$

Luego, usando TFC para derivar respecto x la ecuación (I) se tiene que

$$\underbrace{\left(\int_1^x f(t)\cos\left(\frac{\pi}{t}\right)dt\right)'}_{\text{Por TFC versión 1 esto es igual a } f(x)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)} + \underbrace{\left(\int_0^{f(x)} \operatorname{sen}(\pi t)\,dt\right)'}_{\text{por TFC y Regla de la cadena, esto es igual a } \operatorname{sen}(\pi f(x))\cdot f'(x)} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)' \to 0 \text{ (es cte)}$$

$$\Rightarrow f(x)\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + \operatorname{sen}(\pi f(x))\cdot f'(x) = 0, \quad \text{con } 0 < f(x) < 1/2$$

evaluando en $x=1$ se tiene que

$$f(1)\cos(\pi) + \operatorname{sen}(\pi f(1))\cdot f'(1) = 0 \quad \Big| \text{ usando que } f(1) = 1/3$$

$$\Rightarrow \frac{\overbrace{\cos(\pi)}^{-1}}{3} + \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\cdot f'(1) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} f'(1) = 0 \Rightarrow \boxed{f'(1) = \frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

dt

P3 (i) encontrar $f(x)$ y $a>0$ tq se cumpla

$$6+\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x};\ \forall x>0. \quad (2)$$

evaluando (2) en $x=a$, entonces

$$6+\cancel{\int_a^a \frac{f(t)}{t^2}\,dt}^{\,0} = 2\sqrt{a} \Rightarrow \boxed{a=9}$$

Luego, derivando (2) respecto x, ~~por TFC~~ (usando TFC). se tiene que:

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow \boxed{f(x) = x^{3/2}} \ //$$

(ii) $$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x (x-1)\operatorname{sen}(t^2)\,dt}{\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen}(t^2-1)\,dt} \quad (3)$$

Cuando $x\to 1$, $$\lim_{x\to 1}(x-1)\int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt = (1-1)\int_1^1 \operatorname{sen}(t^2)\,dt$$
$$= 0$$

$$\lim_{x\to 1}\int_{x^2}^{x^3} \operatorname{sen}(t^2-1)\,dt = \int_1^1 \operatorname{sen}(t^2-1)\,dt = 0.$$

$\Rightarrow$ en el limite (3) se produce un $\frac{0}{0}$, por lo que usando L'hopital se tiene que

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt}{\int_{x^2}^{x^3}\operatorname{sen}(t^2-1)\,dt}\overset{L'HO}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt+(x-1)\operatorname{sen}(x^2)}{3\operatorname{sen}(x^6-1)x^2-2\operatorname{sen}(x^4-1)x}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\overbrace{(x-1)\operatorname{sen}(x^2)}^{\to 0}+\overbrace{\int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt}^{\to 0}}{\underbrace{3x^2\operatorname{sen}(x^6-1)-2\operatorname{sen}(x^4-1)x}_{\to 0}}$$

usamos L'hopital nuevamente

L'HO

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\underbrace{\operatorname{sen}(x^2)}_{\operatorname{sen}(1)}+\underbrace{2x\cos(x^2)(x-1)}_{\to 0}+\underbrace{\operatorname{sen}(x^2)}_{\operatorname{sen}(1)}}{\underbrace{6x\operatorname{sen}(x^6-1)}_{0}+\underbrace{3x^2\cdot 6x^5\cos(x^6-1)}_{\to 18}-\underbrace{2\operatorname{sen}(x^4-1)}_{0}-\underbrace{2x\cdot 4x^3\cdot\cos(x^4-1)}_{\to 8}}$$

$$=\frac{2\operatorname{sen}(1)}{18-8}=\frac{2\operatorname{sen}(1)}{10}=\frac{\operatorname{sen}(1)}{5}.$$

P4| Proceder por inducción en n y usar integración por partes para $\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt=\int_{x_0}^{x}(f^{(n)})'(t)(x-t)^n\,dt$.

Dudas al mail

P6] $G(x) = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+x^2}$; $H(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$

(a) PDQ: $G'(x) = H'(x)$.

En efecto, $G'(x) = \left(\int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}\right)'$ | Definiendo $g(x) = \frac{1}{x}$

$= \left(\int_1^{g(x)} \frac{dt}{1+t^2}\right)'$ | Usando TFC, y composición de funciones $\left(\int_{x_0}^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f(g(x))\cdot g'(x)$

$= \frac{1}{1+g^2(x)} \cdot g'(x)$

$= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= -\frac{1}{x^2+1}$

$\therefore G'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Por otro lado, $H'(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$ | Por TFC, $\left(\int_x^{x_0} f(t)\,dt\right)' = -f(x)$

$= -\frac{1}{1+x^2}$

$\therefore G'(x) = H'(x)$ ■

(ii) PDQ: $G(x) = H(x)$.

Como $G'(x) = H'(x)$ por parte anterior, entonces

$G(x) = H(x) + C$ (A lo más pueden diferir en una constante).

con $C \in \mathbb{R}$.

Pero $G(1) = \int_1^{1/1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^2} = 0$

$H(1) = \int_1^1 \frac{dt}{1+t^2} = 0$

$\therefore G(1) = H(1)$, por lo tanto $C = 0$.

$$\boxed{\therefore G(x) = H(x)}$$

(iii) PDQ: $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x > 0$.

Sea $x > 0$, entonces $H(x) = \int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t)\Big|_x^1$
$= \arctan(1) - \arctan(x)$

$G(x) = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t)\Big|_1^{1/x} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan(1)$

Pero $G(x) = H(x)$, entonces:

$\arctan(1) - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan(1)$ $\Big|$ $\arctan(1) = \pi/4$

$\Rightarrow \frac{\pi}{4} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}$, entonces:

$\underline{\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$