

MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral.

Profesor: Sebastián Donoso.

Auxiliar: Benjamín Jauregui.

Fecha: 26 de septiembre de 2019.



Auxiliar 7: Primitivas

RESUMEN SEMANA 5

Definición 1. (Primitiva) Una función F continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y derivable en $Int(I)$ se llama primitiva de una función f sobre I ssi

$$F'(x) = f(x), \forall x \in Int(I)$$

Obs 1: Dos primitivas de una misma función f difieren a lo más en una constante.

Obs 2: A la expresión $\int f(x)dx$ se le llama **integral indefinida** de f

Teorema 1 (Cambio de variable). Si $u = g(x)$, entonces

$$\int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

Obs: Cuando se hace el cambio de variable $u = g(x)$ los diferenciables cumplen que $du = g'(x)dx$.

Proposición 1 (Integrar por partes). Sean u y v dos funciones en x , entonces:

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

Obs: Por ahorro de notación, se tiende a escribir la fórmula de arriba simplemente como

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Ejemplo 1 (Cambios de variable usuales). ■

Para $a^2 + x^2$, usar $x = a \cdot \tan(v)$ ó $x = a \cdot \sinh(t)$.

■ Para $a^2 - x^2$, usar $x = a \cdot \sin(v)$ ó $x = a \cdot \cos(v)$.

■ Para $x^2 - a^2$, usar $x = a \cdot \sec(v)$ ó $x = a \cdot \cosh(t)$.

Ejemplo 2. Sea f una función racional que solo depende de $\sin(x)$ y $\cos(x)$, es decir, $f(x) = R(\sin(x), \cos(x))$. entonces se recomienda hacer el cambio de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Usando este cambio de variable se tiene que

■ $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

■ $\sin(x) = \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$

■ $\cos(x) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)$

■ $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

P1.- Usando el método de cambio de variables resuelva

i) $\int \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}} dx$

ii) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

iii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ **Hint:** Considere algún cambio trigonométrico.

P2.- Usando integración por partes calcule

i) $\int \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

ii) $\int e^x \sin(x) dx$

P3.- Usando el cambio de variables $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ calcule la siguiente primitiva

$$\int \frac{1}{1 + \cos(x) + \sin(x)} dx$$

P4.- Usando el método de fracciones parciales calcule

i) $\int \frac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} dx$

ii) (**Propuesto**) $\int \frac{1}{1-x^2} dx$