MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 9 de agosto de 2019.

Resumen C1

Definición 1 (Subsucesión)**.** Sea (s_n) una sucesión. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. Llamaremos **subsucesión** de s_n generada por f, a la sucesión (u_n) definida por:

$$u_n = s_{f(n)}$$

Teorema 1 (Caracterización de convergencia)**.** *Sea (s_n) una sucesión y $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$s_n \to \ell \iff s_{f(n)} \to \ell, \forall s_{f(n)} \text{ subsucesión de } (s_n)$$

Teorema 2 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Definición 2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una función continua en el punto $\overline{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \implies f(x_n) \to f(\overline{x})$$

Teorema 3 (Álgebra de funciones continuas en un punto)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Las siguientes funciones son continuas en $\overline{x}$:*

1. $f + g$
2. $f - g$
3. λf, $\lambda \in \mathbb{R}$
4. $f \cdot g$
5. $\frac{f}{g}$, cuando $g(\overline{x}) \neq 0$.

Teorema 4 (Composición de continuas)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones. si f es continua en $\overline{x} \in A$ y g es continua en $f(\overline{x}) \in B$, entonces $g \circ f$ es continua en $\overline{x}$.*

Teorema 5. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ ssi se cumple que $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$,*

$$|x - \overline{x}| \leq \delta \implies |f(x) - f(\overline{x})| \leq \epsilon$$

Definición 3. $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.

Teorema 6 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente.*

Teorema 7. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) \cdot f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.*

Teorema 8 (TVI)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$ entonces $\forall e \in (c, d), \exists x \in [a, b]$ tal que $f(x) = e$.*

Teorema 9 (Weierstrass)**.** *$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y máximo en $[a, b]$.*

Teorema 10. *Sea I un intervalo y $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona. Entonces $J = f(I)$ es una intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ e continua*

Definición 4. La función $f : A\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si para todo $\epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon$ tal que

$$(\forall x, y \in A), |x - y| \leq \delta_\epsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

Obs: La notación δ_ϵ es solo para indicar que el delta debe depender solo del epsilon que se tome.

Teorema 11. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua ssi ella es continua en todo punto $\overline{x} \in A$.*

Definición 5 (Derivable)**.** Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\overline{x} \in (a, b)$, si existe el límite

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$$

O equivalentemente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x} + h) - f(\overline{x})}{h}$$

Y se denota por $f'(\overline{x})$ o $\frac{df}{dx}(\overline{x})$ y se llama la derivada en $\overline{x}$.

Proposición 1 (Álgebra de derivadas). *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces:*

- $(f + g)'(\overline{x}) = f'(\overline{x}) + g(\overline{x})$
- $(fg)'(\overline{x}) = f'(\overline{x})g(\overline{x}) + f(\overline{x})g'(\overline{x})$
- *Si* $g(\overline{x}) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(\overline{x}) = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x}) - f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g(\overline{x})^2}$

Teorema 12 (Regla de la cadena). *Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x})$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con*

$$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

Teorema 13 (Derivada inversa). *Sea $f : (a, b) \to (c, d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ con $f'(\overline{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ es derivable en $\overline{y} = f(\overline{x})$ con*

$$(f^{-1})'(\overline{y}) = \frac{1}{f'(\overline{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\overline{x}))}$$

Teorema 14. *Si $\overline{x} \in (a, b)$ es una mínimo o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(c\overline{x}) = 0$.*

Teorema 15 (TVM). *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(\overline{x} =\neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Corolario 1. *En específico, si $g(x) = x$, entonces bajo las mismas hipótesis anteriores*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teorema 16. *Si $\overline{x} \in (a, b)$ es una mínimo o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(c\overline{x}) = 0$.*

Teorema 17 (TVM). *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(\overline{x} =\neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Corolario 2. *En específico, si $g(x) = x$, entonces bajo las mismas hipótesis anteriores*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Teorema 18 (l'Hópital). *Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b), tales que*

$$\lim_{x \to \overline{x}} f(x) = \lim_{x \to \overline{x}} g(x) = L$$

Con $L = 0$ o $L = \infty$. Si además $g(\overline{x}) \neq 0$ para too $x \in (a, b)$. Entonces

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \overline{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Siempre que este último bien definido.

Teorema 19. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$y derivable en (a, b). si $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0) para todo $x \in (a, b)$, entonces f es creciente (resp. decreciente) en $[a, b]$. Si la desigualdad es estricta, la monotonía es igualmente estricta.*

Definición 6 (Convexidad). Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice *convexa* si, $\forall x < z < y$,

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x)$$

Otra caracterización apañadora es

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), , y \in (a, b), \lambda \in (0, 1)$$

Teorema 20. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ ssi f' es creciente en (a, b).*

Teorema 21. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, y sea*

$$t_f^k(h) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})}{2}h^2 + ... + \frac{f^{[k]}(\overline{x})}{k!}h^k$$

su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}$. Entonces

$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + o((x - \overline{x})^k)$$

Proposición 1. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, con $f'(\overline{x}) = ... = f^{[k-1]}(\overline{x}) = 0$ y $f^{[k]}(\overline{x}) \neq 0, k \geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:*

(a) *Si k es par y $f^{[k]} > 0$, $\overline{x}$ es un mínimo local.*

(b) *Si k es par y $f^{[k]} < 0$, $\overline{x}$ es un mínimo local.*

(c) *Si k es impar, $\overline{x}$ es un punto de inflexión.*

Teorema 22. *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, (k+1)-veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces para todo $x > \overline{x}$ (resp. $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (resp. $\xi \in (x, \overline{x})$) tal que*

$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}$$