MA1002-5 Cálculo Diferencial e Integral.
Profesor: Sebastián Donoso.
Auxiliar: Benjamín Jauregui.
Fecha: 22 de agosto de 2019.

Auxiliar 3: Derivadas

RESUMEN SEMANA 3 + algo de la 4

Definición 1 (Derivable)**.** Diremos que $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\overline{x} \in (a,b)$, si existe el límite

$$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$$

O equivalentemente

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}+h) - f(\overline{x})}{h}$$

Y se denota por $f'(\overline{x})$ o $\frac{df}{dx}(\overline{x})$ y se llama la derivada en $\overline{x}$.

Propiedades 1 (Álgebra de derivadas)**.** Sean $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{x} \in (a,b)$. Entonces:

Teorema 1 (Regla de la cadena)**.** *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ derivable en $\overline{x} \in (a,b)$ y $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x})$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con*

$$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

Teorema 2 (Derivada inversa)**.** *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x} \in (a,b)$ con $f'(\overline{x}) \neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1} : (c,d) \to (a,b)$ es derivable en $\overline{y} = f(\overline{x})$ con*

$$(f^{-1})'(\overline{y}) = \frac{1}{f'(\overline{x})} = \frac{1}{f'(f^{-1}(\overline{x}))}$$

Teorema 3. *Si $\overline{x} \in (a,b)$ es una mínimo o máximo local de una función derivable $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, entonces $f'(c\overline{x}) = 0$.*

Teorema 4 (TVM)**.** *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(\overline{x} = \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$. entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Corolario 1. *En específico, si $g(x) = x$, entonces bajo las mismas hipótesis anteriores*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

P1.- Calcule las derivadas de las siguientes funciones.

1. $f(x) = arcsen(x)$.
2. $f(x) = arctan(x)$.
3. $f(x) = \frac{e^x ln(x)}{x^2}$

P2.- Considere función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ a & x = 0 \\ sen(bx) & x > 0 \end{cases}$$

Determine los valores de a y b para que f sea derivable en todo $\mathbb{R}$ y encuentre la derivada en todo punto.

P3.- Considere las funciones $u, v : [0, T] \to \mathbb{R}$ tal que son derivables en $(0, T)$ y que cumplen que $u(0) = v(0)$ y $u(T) = v(T)$. Demuestre que $\exists t_0 \in [0, T]$ tal que $u'(t_0) = v'(t_0)$.

P4.- Considere la función $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = arcsen(2x-1) + 2arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)$$

Demuestre que f es una función constante.

Indicación: Estudie f'.

P5.- Considere una caja de base cuadrada de lado a y de altura h. Un insecto esta localizado en el vértice A y debe llegar al vértice B caminando en línea recta hasta el punto P por la tapa de la caja y del mismo modo se desplaza desde P hasta B por la cara frontal (ver figura 1).

Determine la posición P tal que se minimice la distancia total recorrida.

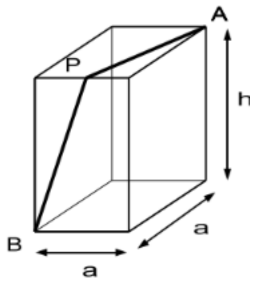

Figura 1: Figura 1