

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez A.



Series

Semanas 14 y 15: Series y series de potencias

Primera parte: Series generales

- **Serie:** Sea $(a_n)_n$ una sucesión real. Definimos la **serie** asociada a $(a_n)_n$ como la suma de todos sus términos, es decir:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

A la sucesión $(a_n)_n$ se le conoce como **término general de la serie**.

En otras palabras, si para cada $N \in \mathbb{N}$ se consideran la sumas parciales de la sucesión, es decir, la suma de sus primeros N términos, se obtiene la sucesión $(S_N)_N$ de sumas parciales, dada por:

$$S_N = \sum_{k=0}^N a_k$$

Así, se tiene que:

$$S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^N a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

De esta manera, si el límite de $(S_N)_N$ existe, diremos que la serie es convergente y que su valor es S . En caso contrario, diremos que la serie es divergente.

En lo que sigue, consideraremos $(a_n)_n$ una sucesión real.

- **Condición necesaria de convergencia:** Siempre se tiene la siguiente implicancia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge} \Rightarrow (a_k)_k \text{ converge a } 0$$

Es decir, si el término general de una serie no converge a 0, es inmediato que la serie no puede converger. En cambio, si el término general converge a 0, es posible que la serie converja, pero es necesario hacer un análisis más profundo.

- **Álgebra de series:** Sean $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ dos series convergentes. Entonces, se tiene que:

- $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k)$ es convergente, y su valor es $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k)$ es convergente y su valor es $\left(\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right)$.

- **Convergencia absoluta:** Diremos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente si la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge.

Tenemos las siguientes propiedades sobre la convergencia absoluta:

- Si $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente, entonces converge.
- Una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge absolutamente si y sólo si tanto la serie de sus términos positivos como la serie de sus términos negativos convergen.
- **Convergencia condicional:** Diremos que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge condicionalmente si converge, pero no converge absolutamente.
- **Criterios de convergencia para series no negativas:** Consideremos la serie $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ tal que su término general es no negativo, es decir, $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$. En este caso, se tienen los siguientes criterios de convergencia de la serie:
 - **Cota Superior:** La serie S converge si y sólo si la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente, es decir, si $\exists M \geq 0$ tal que $S_N \leq M \forall N \in \mathbb{N}$.
 - **Comparación por mayoración:** Si existen $(b_n)_n$, $\alpha > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$a_n \leq \alpha b_n \quad \forall n \geq n_0$$

Entonces se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ converge} & \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.} \\ \text{Si } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ diverge} & \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ diverge.} \end{array} \right.$$

- **Comparación por cociente:** Sea $(b_n)_n$ tal que $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y tal que el siguiente límite existe:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Entonces se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } L > 0 : \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ converge} & \iff \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.} \\ \text{Si } L = 0 : \sum_{k=0}^{\infty} b_k \text{ converge} & \implies \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.} \end{array} \right.$$

- **Criterio del cociente:** Si $a_k > 0$ y $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ existe, se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } r < 1 & : \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.} \\ \text{Si } r > 1 & : \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ diverge.} \\ \text{Si } r = 1 & : \text{No se puede decir nada acerca de la convergencia de } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ con este método.} \end{array} \right.$$

- **Criterio de la raíz:** Si $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ existe, se tiene que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } r < 1 & : \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.} \\ \text{Si } r > 1 & : \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ diverge.} \\ \text{Si } r = 1 & : \text{No se puede decir nada acerca de la convergencia de } \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ con este método.} \end{array} \right.$$

- **Criterio de la Integral Impropia:** Sea $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ una función decreciente. Se tiene entonces que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ converge} \iff \int_1^{\infty} f(x) dx \text{ converge}$$

Ahora, para series más generales existen solo dos criterios:

- **Criterio de Leibnitz:** Sea $(a_n)_n$ una sucesión decreciente y convergente a 0. Entonces se tiene que la serie definida como $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ es convergente.
- **Criterio de Cauchy:** Este es el único criterio que es válido siempre. Sea $(a_k)_k$ una sucesión. La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n, m \geq N, \text{ con } m > n : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \varepsilon$$

Segunda Parte: Series de potencias

- **Series de Potencias:** Una **serie de potencias** es un caso particular de series de la forma:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

donde los coeficientes $(a_k)_k$ son fijos y el valor de x es variable. Observemos que, si miramos la serie como una función de x , tenemos que las sumas parciales corresponden a polinomios:

$$S_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$$

y así, una serie de potencias corresponde al límite de una sucesión de polinomios.

- **Radio de convergencia:** La convergencia de la serie depende del valor de x . Si consideramos:

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \quad \text{o bien} \quad L = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

(cuando alguno de estos límites existe), entonces definimos el **radio de convergencia** de la serie como:

$$R = \frac{1}{L}$$

En el caso que $L = 0$, consideraremos $R = \infty$. Adicionalmente, si $L = \infty$, entonces consideraremos $R = 0$.

- **Convergencia de las series de potencias:** Para una serie de potencias $S(x)$ con radio de convergencia R , se tiene que:
 - Si $|x| < R$, entonces $S(x)$ converge absolutamente.
 - Si $|x| > R$, entonces $S(x)$ diverge.
 - Si $|x| = R$, entonces no se puede decir nada a priori de la convergencia de $S(x)$, por lo que se debe hacer el análisis en cada caso particular.
- **Intervalo de convergencia:** Para una serie de potencias $S(x)$ con radio de convergencia R , se define el **intervalo de convergencia** I como el mayor intervalo en el cual $S(x)$ converge. Por la proposición anterior, se tiene que $(-R, R) \subseteq I \subseteq [-R, R]$.
- **Cálculo del intervalo de convergencia:** Dada una serie de potencias $S(x)$, se puede calcular el intervalo de convergencia en 3 pasos.
 - Calcular el radio de convergencia R de $S(x)$.
 - Estudiar la convergencia de la serie en $x = R$, es decir, la convergencia de $S(R)$, y estudiar la convergencia de la serie en $x = -R$, es decir, la convergencia de $S(-R)$.
 - Se tiene que I es igual a $(-R, R)$ unido a $\{R\}$ y/o $\{-R\}$ si corresponde.

- **Funciones definidas como series de potencias:** Sea una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, con radio de convergencia $R > 0$ e intervalo de convergencia I . Entonces, se puede definir la función:

$$\begin{aligned} f : I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \end{aligned}$$

Esta función está bien definida porque el valor de la serie existe justamente en I . Para esta función, se tienen las siguientes propiedades:

- **Continuidad:** f es continua en $\text{Int}(I) = (-R, R)$.
- **Integrabilidad:** Por el punto anterior, f es integrable en $(-R, R)$. Además, se tiene la siguiente fórmula:

$$\forall x \in (-R, R) : \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

es decir, corresponde a integrar término a término la serie.

- **Diferenciabilidad:** Uno de los resultados más fuertes de las series de potencias es que f es de clase $\mathcal{C}^\infty$, es decir, f es infinitamente diferenciable en $(-R, R)$. Además, se tiene la siguiente fórmula:

$$\forall x \in (-R, R) : f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot a_k x^{k-1}$$

es decir, corresponde a derivar término a término la serie.

Observación importante. En esta última serie, la sumatoria parte desde $k = 1$, y no desde $k = 0$. Esto es porque para $k = 0$ el término es constante, por lo que al derivar se va a 0.

- **Derivadas de orden superior:** En general, para cada $j \in \mathbb{N}$, se tiene la siguiente fórmula:

$$\forall x \in (-R, R) : f^{(j)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^{(j)} = \sum_{k=j}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot (k-j+1) \cdot a_k x^{k-j}$$

- **Cálculo del radio de convergencia - Caso General:** En muchas ocasiones, los límites que definen el radio de convergencia no existen. Ante lo anterior, existe un valor que siempre está bien definido:

$$L = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

donde, para cualquier sucesión $(b_n)_n$:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} b_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sup_{n \geq k} b_n \right)$$

De esta manera, definiendo $R = \frac{1}{L}$ como antes, se tiene que el radio de convergencia corresponde justamente a R .