

P1) $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e integrabile

$$\bullet f((a+b)-x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b]$$

$$2) I = \int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$$

C.V. $u = a+b-x$
 $du = -dx$
 $\Rightarrow x = a+b-u$
si $x=a \Rightarrow u=b$
 $x=b \Rightarrow u=a$

$$\int_a^b (a+b-u) f(a+b-u) du = \int_a^b (a+b-u) f(a+b-u) du$$

$$= \int_a^b (a+b) f(u) du - \underbrace{\int_a^b f(u) u du}_I$$

$$\Rightarrow 2I = (a+b) \int_a^b f(u) du$$

$$I = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(u) du$$

$g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua

PDB
$$\int_0^\pi x g(\sin x) = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi g(\sin x) dx$$

Hint: Intuición usar parte anterior

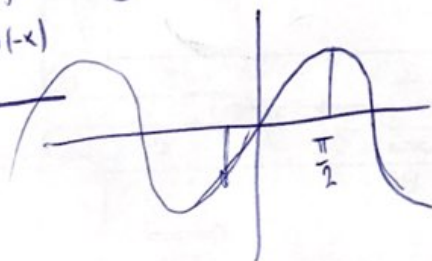
$f(x) = g(\sin x)$

acotada? pues si $TW \rightarrow$ por ser continua
 Existe $\bar{x} \wedge \underline{x}$
 tales, $\Rightarrow$ Existe $\max$ y $\min$
 $g(\underline{x}) \leq g(x) \leq g(\bar{x}), \forall x \in [-1, 1].$

luego es integrable y bien de $f \forall x \in \mathbb{R}$ pues
 $\sin(x) \in [-1, 1]$. Ojo que $\sin(x)$ cont. alg y composición

Notar que $g(\sin(\pi + 0 - x)) = g(\sin(\pi) \overset{(-x)}{\cos \frac{\pi}{2}} + \sin(\pi) \overset{(-x)}{\cos \pi})$
 $= g(-\sin(-x)) = g(-\sin(x))$

$\sin(x) = -\sin(-x)$
 IMPAR



$= g(\sin(x)) //$

cumple parte 2, por $b=\pi, a=0 \quad f(x) = g(\sin(x))$

$\Rightarrow \int_0^\pi x g(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi g(\sin(x)) dx ; \frac{\pi+0}{2} = \frac{\pi}{2} //$

P21

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2} du$$

Clásica
arctg(u) (0).

Esto lo impengo.

$$X(g(\sin(x))) = \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} = \frac{x \sin(x)}{2 - \sin^2(x)}$$

$$C^2 + S^2 = 1 \\ \Rightarrow C^2 = 1 - S^2$$

$g(s) = \frac{s}{2-s^2}$ la cual es continua en $[-1, 1]$ ☺

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{x \sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx = \int_0^{\pi} x g(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} g(\sin(x)) dx$$

$$\Rightarrow = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)} dx$$

C.V $u = \cos(x)$
 $du = -\sin(x) dx$

$$x = \pi \Rightarrow -1 = u$$

$$x = 0 \Rightarrow 1 = u$$

$$= -\frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{du}{1+u^2} \xrightarrow{\text{arctg}} = \frac{\pi}{4}$$

Preliminar:

TVMG: Si f continua en $[a, b]$ y g integrable en $[a, b]$, que no cambia signo, $\exists \epsilon \in (a, b)$

$$\int_a^b f g = f(\epsilon) \int_a^b g \quad \downarrow \text{no invierte integrales.}$$

¿Qué me pregunta esto? Una relación entre integrales y derivada de una función en un intervalo dado.

Ejercicio

Sean $f, g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas $|g(x)| > 0, \forall x \in [0, \infty)$

$$\text{y } f(0) = 0$$

Demuestre $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = 0, n \in \mathbb{N} - \{0\}$

Desarrollo

No tenemos que ambas funciones son continuas en su dom. en particular en un dominio acotado como $[0, 1]$ luego g será integrable.

Como $g(x)$ tiene signo constante mantiene su tal.

$$\Rightarrow \text{por TVMG, } \exists \xi \in (0, 1) / \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = f\left(\frac{\xi}{n}\right) \int_0^1 g(x) dx$$

Ahora tomaremos el lim de la expresión para calcular lo

$$\text{pedido } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right) g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{f\left(\frac{\xi}{n}\right)}_{\text{cte respecto a } n} \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 g(x) dx \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\xi}{n}\right) = \int_0^1 g(x) dx \cdot f(0) = 0.$$

Cómo puedo hacer todos los pasos

1) $\int_0^1 g(x) dx$ pasa a ser una constante para la variable n , por lo que sale del límite, Además como g es integrable en un $[0,1]$ cerrado y acotado.

$$\text{Por lo que } \int_0^1 g(x) dx \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\varepsilon}{n}\right)$$

$\downarrow$ acotado $\downarrow$ 0

Clásico de 0 aniquila o mata por acotado.

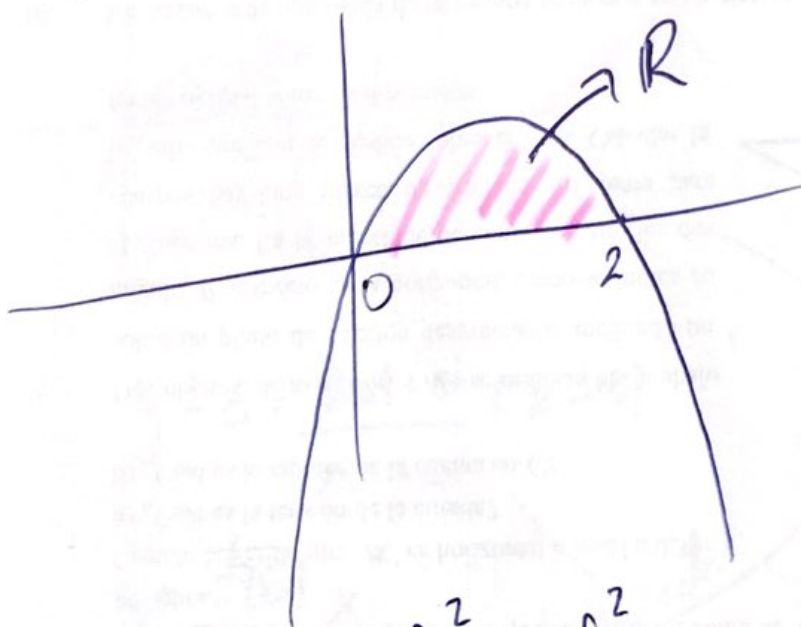
$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{\varepsilon}{n}\right) = f(0) \text{ por continuidad}$$

Caracterización vía sucesiones

$$X_n \rightarrow x \Rightarrow f(X_n) \rightarrow f(x) //$$

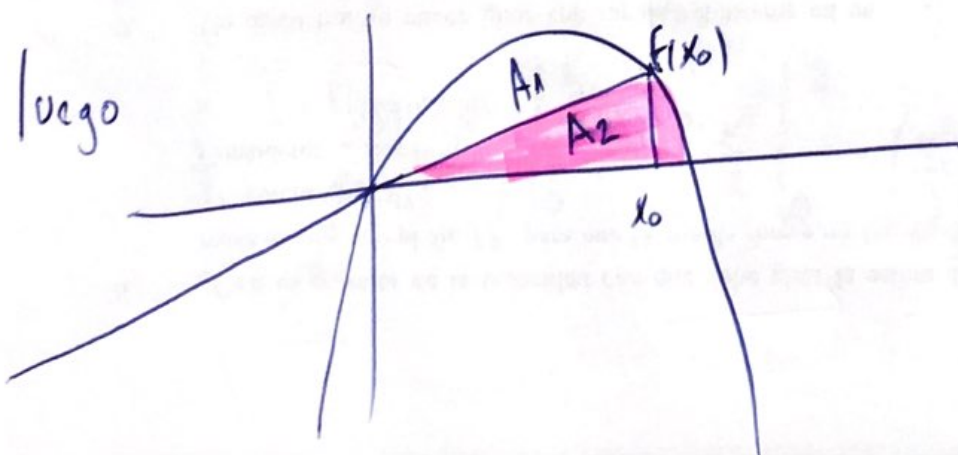
P4) $f(x) = 2x - x^2$

$x=0$ v $x=2$ som 0



$$A(A) = \int_0^2 2x - x^2 dx = 2 \int_0^2 x dx - \int_0^2 x^2 dx$$

$$= 2 \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} //$$



Impongo

$$A_1 = A_2 \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{2}{3} = A_2$$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$



a esto
↑ curva
la llamamos
= $C(x)$

$$y - 0 = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - 0} (x - 0)$$

$$y = \frac{f(x_0)}{x_0} x$$

la recta.

luego por aditividad.

$$\frac{2}{3} = \int_0^2 C(x) dx = \int_0^{x_0} \frac{f(x_0)}{x_0} x dx + \int_{x_0}^2 (2x - x^2) dx$$

$$\frac{2}{3} = \underbrace{\frac{f(x_0)}{x_0}}_{cte} \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{x_0} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x_0}^2 - \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{x_0}^2$$

$$\frac{2}{3} = \frac{f(x_0)}{2x_0} x_0^2 + \frac{4}{3} - x_0^2 + \frac{x_0^3}{3}$$

$$\# f(x_0) = (2x_0 - x_0^2)$$

despejar!

$$x_0 = \sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow (x_0, f(x_0)) = (\sqrt[3]{4}, 2\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{16}) //$$

$$\frac{PS}{L} \int_0^2 \pi (x^2 \sqrt{2 - \cos(x^5)})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 x^4 (2 - \cos(x^5)) dx$$

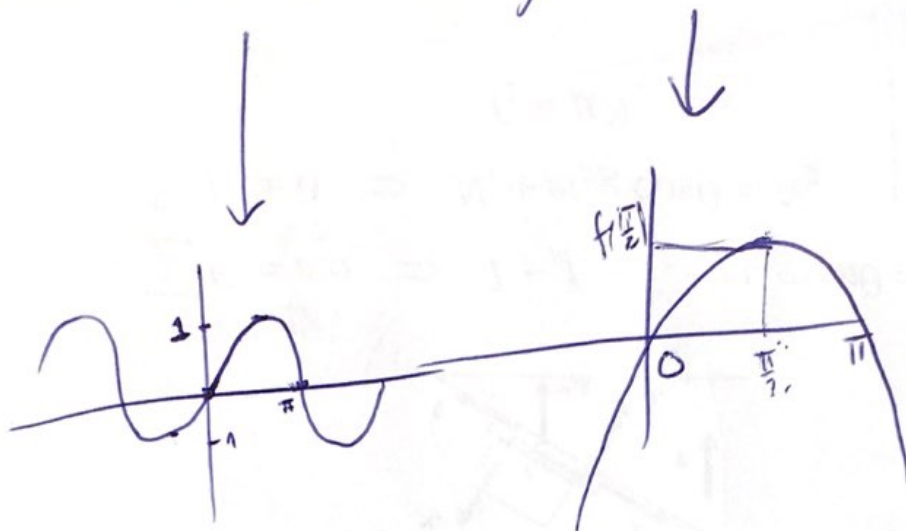
$$= \pi \left(\int_0^2 2x^4 dx - \int_0^2 x^4 \cos(x^5) dx \right)$$

$$= \pi \left(2 \left(\frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 - \frac{1}{5} \int_0^{32} \cos(u) du \right)$$

$$\begin{aligned} x=2 &\Rightarrow u=32 \\ x=0 &\Rightarrow u=0 \end{aligned}$$

$$= \pi \left(\frac{64}{5} - \frac{\sin(32)}{5} \right) //$$

P61 $f(x) = \sin(x)$ $g(x) = \pi x - x^2$



$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\approx 2,5$$

Solo iteraci3n
no estiben est3.

$$\forall x \in [0, \pi]$$

• Dom $\forall x \in [0, \pi]$ $g(x) \geq f(x)$ $h(x) = g(x) - f(x)$

$$\Leftrightarrow g(x) - f(x) \geq 0$$

• •

Hint: Vea que $g(x) - f(x)$ es c3ncava

$$h(x) = \pi x - x^2 - \sin(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = \pi - 2x - \cos(x)$$

$$\Rightarrow h''(x) = -2 + \sin(x)$$

$$\forall x \in [0, \pi] \sin(x) \in [-1, 1]$$

$$h''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ c3ncava $\Rightarrow$ p3cdo

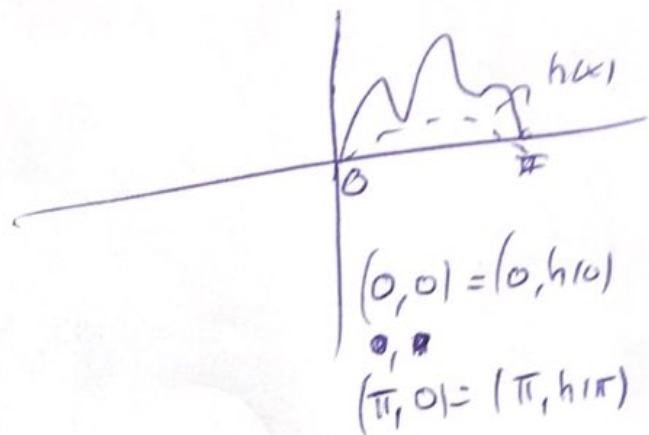


unir 2 puntos en el
esta r3a bajo la curva

$$h(x) \geq 0$$

$$\Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0$$

$$g(x) \geq f(x) //$$



La unión de
 Estos puntos es
 $y=0$