P4 | $2x - x^2 \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{4}$

P5 | V_{ox} $x^2\sqrt{2-\cos(x^5)}$ $\rightarrow \frac{c.v}{t.l}$ $\left[\frac{64}{3} - \frac{\operatorname{sen}(32}{5}\right]\pi = V_{ox}$

P8 | $V_{ox} = \pi \int_1^b \left(\frac{1}{x^3}\right)^2 dx$

$= \pi\left[-\frac{1}{5b^5} + \frac{1}{5}\right] \rightarrow \lim_{b\to\infty} V_{ox} = \frac{\pi}{5}$

Recomendación propuesto Riemann, definición! luego si $M_i(f) = \sup\{f(x)\} \Rightarrow \frac{1}{M_i(f)} < \frac{1}{m_i(f)}$

Parte b es extra! Partición vía $\varepsilon - \mathbb{P}_{[a,b]}$

P6 | $A(R) = \frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3} - 2$ | $V_{ox}(R) = \frac{\pi^6}{3} - \frac{\pi^6}{2} + \frac{\pi^6}{5} - \frac{\pi^2}{2}$

$V_{oy}(R) = \frac{\pi^5}{6} - 2\pi^2$

Mucho éxito en el control

Estimados(as) Ustedes pueden! ♡

a) Sea $P \in \mathcal{P}_{a,b}$. Calculemos las sumas inferior y superior:

$$s\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i \qquad S\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n} M_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i$$

Notemos que:

$$M_i\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{m_i(f)} \qquad m_i\left(\frac{1}{f}\right) = \frac{1}{M_i(f)}$$

Luego tenemos que:

$$S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{m_i(f)} - \frac{1}{M_i(f)}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(f) - m_i(f)}{m_i(f)M_i(f)}\Delta x_i$$

Como $c < f(x)$, $\forall x \in [a,b]$, tenemos $(m_i(f)M_i(f))^{-1} < c^{-2}$. Usando esto:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i(f) - m_i(f)}{m_i(f)M_i(f)}\Delta x_i < \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}(M_i(f) - m_i(f))\Delta x_i = \frac{1}{c^2}(S(f,P) - s(f,P))$$

Por lo que se concluye el resultado.

b) Veamos que $\frac{1}{f}$ cumple la condición de Riemann, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, \quad S\left(\frac{1}{f}, P\right) - s\left(\frac{1}{f}, P\right) < \varepsilon$$

Usando la parte a), vemos que solo necesitamos que exista P tal que $S(f,P) - s(f,P) < c^2\varepsilon$. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Como f es Riemann-integrable, cumple la condición de Riemann, por lo que para $c^2\varepsilon > 0$ existe $P_0 \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que $S(f,P_0) - s(f,P_0) < c^2\varepsilon$. Por la parte a) se tiene entonces:

$$S\left(\frac{1}{f}, P_0\right) - s\left(\frac{1}{f}, P_0\right) < \frac{1}{c^2}(S(f,P_0) - s(f,P_0)) < \frac{1}{c^2}c^2\varepsilon = \varepsilon$$

Luego basta tomar $P = P_0$ y se tiene lo pedido.

Observación: Si en la expresión integral del resto se aplica el teorema del valor medio generalizando para integrales se tiene que:

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right]_{x}^{x_0} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

que corresponde a la expresión de Lagrange para el resto del desarrollo de Taylor.