MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.

Auxiliar 11: C2

18 de octubre de 2019

P1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f((a + b) - x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$

a) Probar que $\displaystyle\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$

b) Sea ahora $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que $\displaystyle\int_0^\pi xg(sen(x)) = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi g(sen(x))dx$

P2. Pruebe que

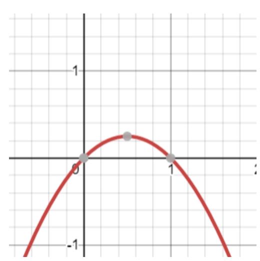
$$\int_0^\pi \frac{xsen(x)}{1 + cos(x)^2}dx = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}dx$$

y calcule su valor.

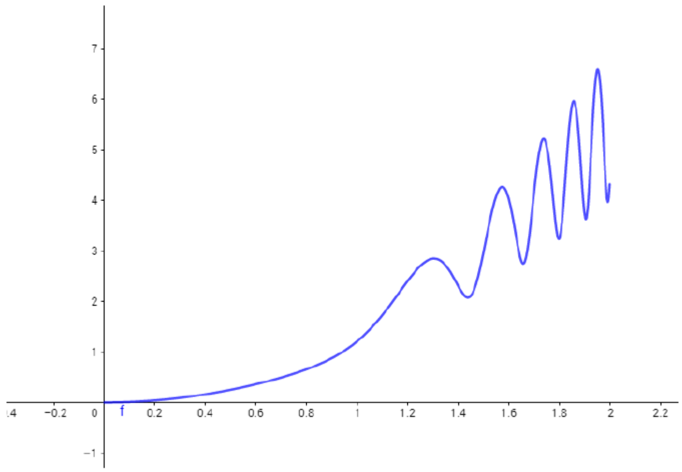
P3. Sea $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas, donde tenemos la positividad para $g(x)$ en todo su dominio y que $f(0) = 0$. Demuestre:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(\frac{x}{n})g(x)dx = 0$$

P4. Considere la función $f(x) = 2x - x^2$. Llamaremos R a la región comprendida entre la curva y el eje x en la región positiva de f. Encuentre el punto $(x_0, f(x_0))$ tal que al trazar la recta desde el origen hacia él, divida la región R en dos partes de igual área.



P5. Considere la función $f(x) = x^2\sqrt{2 - \cos(x^5)}$ Determine el volumen de la región formada al rotar la región encerrada entre 0 y 2 y la recta $y = 0$.



P6. Considere las funciones $f(x) = sen(x)$ y $g(x) = \pi x - x^2$ definidas para $x \in [0, \pi]$

- Demuestre que $\forall x \in [0, \pi], g(x) \geq f(x)$
  Hint: verifique que $g(x) - f(x)$ es cóncava y concluya
- Para la región R del primer cuadrante definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \pi] \wedge y \in [f(x), g(x)]\}$$

  Se pide calcular el área de R y calcular los volúmenes de los solidos engendrados por la rotación de R en torno al eje OX y en torno al eje OY.

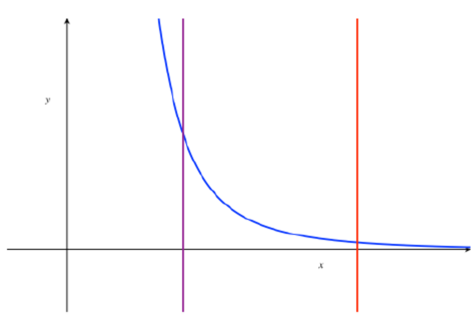
  hint: recuerde que $sen^2(x) = \dfrac{1 - cos(2x)}{2}$

P7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ en todo su dominio. Para $a < b \ \in \mathbb{R}$ tales que $f(a) = f(b) = 0$ y $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 1$ demuestre que

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2}$$

Propuesto

P8. Sea $V(b)$ el volumen del sólido obtenido al rotar con respecto al eje x la región contenida entre la curva $y = x^{-3}$ y el eje x, desde $x = 1$ hasta $x = b$. [Propuesto]



Analice el comportamiento de $V(b)$ a medida que $b \to \infty$.

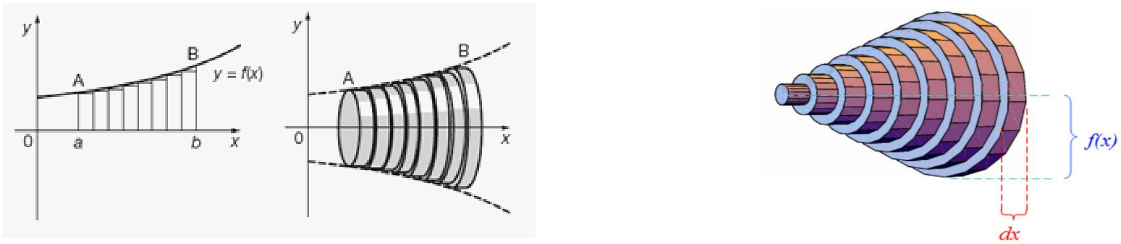


Figura 1: Construcción método del disco

P2. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y acotada inferiormente por una constante $c > 0$. Para demostrar que $\frac{1}{f}$ es integrable, se pide lo siguiente:

(a) Si $S(\cdot,\cdot)$ y $s(\cdot,\cdot)$ denotan las sumas superiores e inferiores, pruebe que para toda partición P del intervalo $[a,b]$ se cumple

$$S(\frac{1}{f},P) - s(\frac{1}{f},P) \leq \frac{1}{c^2}\left\{S(f,P) - s(f,P)\right\}.$$

(b) Use el resultado anterior para demostrar que la función $\frac{1}{f}$ es integrable en $[a,b]$.

Propuesto Sumas Riemann

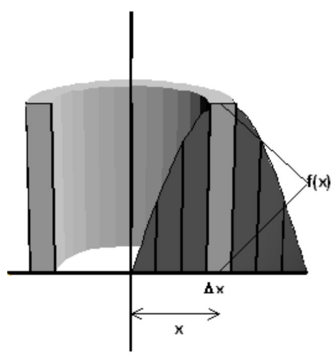


Figura 2: Construcción método de las cascaras