

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Patricio Yáñez**Correo:** pyanez@dim.uchile.cl**Resumen C2-Integración**

4 Agosto 2019

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\text{int}(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in \text{int}(I), \quad F'(x) = f(x)$$

Si F es una primitiva de f , entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente

- $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $\frac{d}{dx} (\int f(x)dx) = f(x)$
- $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
- $\int (\lambda f) = \lambda (\int f)$

- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x , entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$

o, de manera compacta $\int u dv = uv - \int v du$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables

- para $a^2 + x^2$, usar $x = a \tan(v)$ o $x = a \sinh(v)$
- para $a^2 - x^2$, usar $x = a \sin(t)$ o $x = a \cos(t)$
- para $x^2 - a^2$, usar $x = a \sec(v)$ o $x = a \cosh(v)$

obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]:** si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\text{gr}(Q) > \text{gr}(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.
- Sea $R(\cos(x), \sin(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $\sin(x)$ y $\cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = \tan(x/2)$.

■ **Primitivas conocidas:**

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3. \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

$$4. \int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

$$5. \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

$$7. \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$$

$$8. \int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$$

$$9. \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$$

$$10. \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$$

$$11. \int \operatorname{cosec}^2(x) dx = \cotg(x) + C$$

$$12. \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$$

- Sea $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ es una *partición del intervalo* $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Diremos que la norma de la partición P es:

$$|P| = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y denotamos al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$ como $\mathcal{P}_{[a, b]}$.

Importante: notar que $(x_i - x_{i-1}) \leq |P|$

- Sea $P \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definimos su suma superior e inferior como:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i(f) = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

- Si $P, Q \in \mathcal{P}_{[a, b]}$ y $P \subseteq Q$ tenemos que:

$$s(f, P) \leq s(f, Q) \leq S(f, Q) \leq S(f, P)$$

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definimos su integral superior e inferior como:

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx = \inf_{P \in \mathcal{P}_{[a, b]}} S(f, P)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x) dx = \sup_{P \in \mathcal{P}_{[a, b]}} s(f, P)$$

- Diremos que una función es Riemann-Integrable (o simplemente integrable) si su integral superior e inferior coinciden. En dicho caso definimos la integral como:

$$\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx = \underline{\int_a^b} f(x) dx$$

- **Criterio de Riemann:** f es integrable si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a, b]}, S(f, P) - s(f, P) \leq \varepsilon$$

- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y monótona, entonces es integrable en $[a, b]$.
- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en $[a, b]$.
- Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua o acotada y monótona, entonces:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \lim_{|P| \rightarrow 0} s(f, P) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P) \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i\end{aligned}$$

Donde $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

- Dos particiones comunes son la equiespaciada:

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i \frac{b-a}{n}$$

y la geométrica: $x_i = aq^i = a \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} \right)^i$.

- Propiedades de la integral

- $\int_a^b c = c(b-a)$
- $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ si $f(x) \leq g(x)$ en todo $[a, b]$
- $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$

- **Segundo TFC:** Si f es integrable en $[a, b]$ y existe una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $F' = f$ en (a, b) . Entonces: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable la función $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.
- **TFC 1:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces $\forall x \in \text{int}(I)$:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$

- **Corolario del TFC 1:** Si la función F , continua en I es una primitiva cualquiera de f en I , entonces:

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

- **TFC 2:** Sea f integrable en (a, b) si existe una función tal que: $F' = f$ en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Integración por Partes:** Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y con derivadas continuas en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

- **Integración por sustitución:** Sea g continua en $[a, b]$ y con derivada continua en (a, b) . Sea f continua en $g([a, b])$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

- **Valor Medio:** Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Se llama valor medio de f en $[a, b]$ a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Se anota como $\bar{f}$ o $\langle f \rangle$.

- **TVM-integrales:** Si f es continua en $[a, b]$, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

- **TVM Generalizado - integrales:** Si f es continua en $[a, b]$ y g es integrable en $[a, b]$, que no cambia de signo, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$$

- Considere la región o área plana

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- **[Rotación eje OX - Método del disco]**

Dada la región R el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar volúmenes de cilindros o discos de altura infinitesimalmente pequeña, cuya formula es

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Donde cada disco tiene $r = f(x)$ y $h = dx$.

- **[Rotación eje OY - Método de la cáscara]** Dada la región R , le agregamos la restricción de que $0 \leq a < b$. El volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar cilindros huecos, los cuales se calculan de la siguiente forma.

Dada el área sin tapas del cilindro, que se denomina área superficial de formula

$$A_{superficial} = 2\pi rh$$

Si la multiplicamos por una profundidad infinitesimal dx , obtendremos el volumen de un cilindro hueco. Notamos que r es la distancia del eje de giro hasta el cilindro hueco.

Por lo que reconocemos como $r = x$ (si el eje de giro es el eje OY) y $h = f(x)$.

“El trabajo tesonero todo lo vence”

Pa la laif