MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2019, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 10: TFC-SUMAS-ÁREA

11 octaedro 2019

- Considere la región o área plana

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- **[Rotación eje OX - Método del disco]** Dada la región R el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar volúmenes de cilindros o discos de altura infinitesimalmente pequeña, cuya formula es

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

Donde cada disco tiene $r = f(x)$ y $h = dx$.

- **[Rotación eje OY - Método de la cáscara]** Dada la región R, le agregamos la reestricción de que $0 \leq a < b$. El volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Notar que esto viene a partir de sumar cilindros huecos, los cuales se calculan de la siguiente forma.

Dada el área sin tapas del cilindro, que se denomina área superficial de formula

$$A_{superficial} = 2\pi r h$$

Si la multiplicamos por una profundidad infinitesimal dx, obtendremos el volumen de un cilindro hueco. Notamos que r es la distancia del eje de giro hasta el cilindro hueco.

Por lo que reconocemos como $r = x$ (si el eje de giro es el eje OY) y $h = f(x)$.

P1. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n^2 + (i-1)^2}$$

Indicación: Le puede ser útil pensar en sumas de Riemann.
ESTIMADOS Y ESTIMADAS EN ESTE PROBLEMA HUBO UN PROBLEMA DE TIPEO
Ejercicio original Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + (i-1)^2}}$$

Ejercicio Propuesto SPOILER da 0, por qué? Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n^2 + (i-1)^2}$$

P2. Considere la función definida por la regla

$$g(x) = sen(x) \int_0^x f(t)cos(s)dt - cos(x) \int_0^x f(t)sen(t)dt$$

Donde f es una función continua en $\mathbb{R}$.
Pruebe que $g''(x) + g(x) = f(x)$. Usando esto demuestre que si $f(0) > 0$ entonces g tiene un mínimo local en g. Ejercicio Teorema Fundamental del cálculo(TFC) y Optimización.

P3. Demuestre que $\left| \int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x} sen(x)}{1 + x^2} dx \right| \leq \frac{\pi}{12e}$

a) Intuición: Para poder atacar este ejercicio lo mejor es pensar en las propiedades de integrales, intentamos encontrar una cota superior constante, entonces pensar en las cotas de las funciones trigonométricas de intro al cálculo, siempre está acotado entre -1 y .
Además recordar que estoy acotado entre los límites de la integral por lo que si estudio las funciones que quedan, como la exponencial tiene un crecimiento determinado, podré encontrar una cota superior.

b) Teoría:Analizar las funciones dentro de la integral y verificar bajo una condición que esté bien definido.

c) Matraca:Acotar y acotar superiormente.

P4. Sea D la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia de ecuación $(x-1)^2 + y^2 = 5$ y la parábola de ecuación $y = 2(x-1)^2$(región bajo la circunferencia y sobre la parábola)

I Determine el área de la región D

II Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OX.

III Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OY.

Ejercicio Área y Volumen de Sólido en revolución. Para este ejericio se usa esta propiedad!
Demostración propiedad:Paridad/Imparidad de la Integral

P5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Se define $G(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} (x-t) f(t) dt$. Demuestre que $G''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. ($\overline{Propuesto}$)

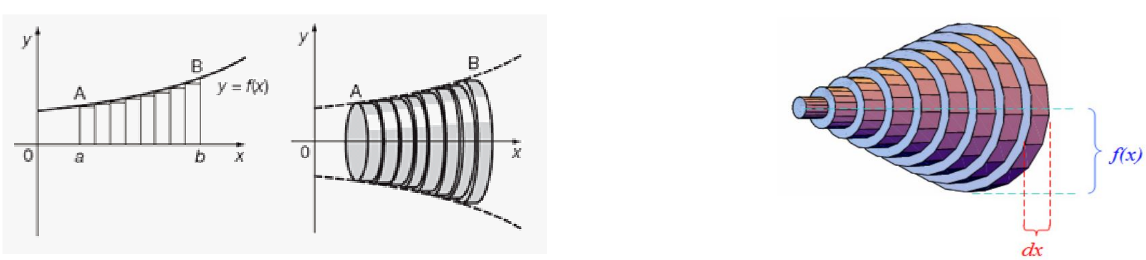


Figura 1: Construcción método del disco

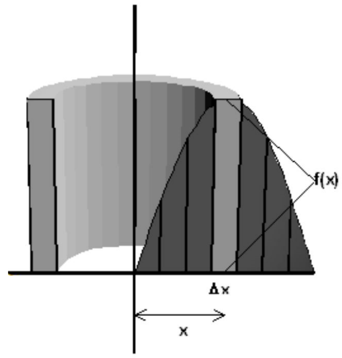


Figura 2: Construcción método de las cascaras

"No tengo frase, pero que les vaya bacan!"
Pato

Continuación TFC.

P1)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}.$$

Veamos $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $f'(x) = \left(\left(1 \cdot \sqrt{1+x^2}\right)^{-1}\right)'$

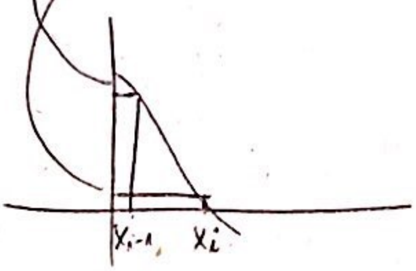
$$f'(x) = -1\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

Luego la función es decreciente si $x \in [0,1]$

Entonces corresponde a la suma inferior de Riemann.

$f(x_i)$ v $f(x_{i-1})$; $x_i = \dfrac{i}{n}$

$\sum m_i(f)\,\Delta x_i$



Recordamos

$$\lim \sum_{i=1}^{n} m_i(f)\,\Delta x_i \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq \lim \sum_{i=1}^{n} M_i(f)\,\Delta x_i$$

En realidad tenemos la igualdad pero, la integral

Está bien definida?

En efecto la función es continua y la suma de Riemann converge a la integral

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

C.V $x = \tan(u)$

$dx = \sec^2(u)\,du$

límite $x=0 = \tan(u)$

$\Rightarrow u = 0$

$x = 1 = \tan(u)$

$\Rightarrow u = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+tg^2(u)}} \cdot \sec^2(u)\,du$$

$1+tg^2(x) = \sec^2(x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(u)\,du$$

$(\sec(x) + tg(x))' = f'(x)$

$= \sec(x)\,tg(x) + \sec^2(x)$

$= \sec(x)\,(tg(x) + \sec(x))$

con $f(x) = \sec(x) + tg(x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec(u)\,\frac{(\sec(u)+tg(u))}{(\sec(u)+tg(u))}$$

Pág 57 Prop

$$= \ln\left(\sec(u) + tg(u)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right) - \ln(1+0)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{\sqrt{2}}+1\right)$$

P2 $g(x) = \operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt - \cos(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$

donde f es continua en $\mathbb{R}$. Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene que $g''(x) + g(x) = f(x)$.

Usando esto dem: si $f(0) > 0 \Rightarrow g$ tiene mín local en $x = 0$.

$$g(x)' = \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cancel{\operatorname{sen}(x)\cos(x)f(x)} + \operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$- \cancel{\cos(x) f(x) \operatorname{sen}(x)}$$

$$= \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow g''(x) = -\operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \boxed{\cos^2(x) f(x)} + \cos(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$+ \boxed{\operatorname{sen}^2(x) f(x)} = -\operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \cos(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$$+ f(x) \Rightarrow g''(x) + g(x) = f(x) \;//$$

$$g'(x) = \cos(x)\int_0^x f(t)\cos(t)\,dt + \operatorname{sen}(x)\int_0^x f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt$$

$x=0$

$$g'(0) = \cancel{\cos(0)}^{1}\cancel{\int_0^0 f(t)\cos(t)\,dt}^{0} + \cancel{\operatorname{sen}(0)}^{0}\cancel{\int_0^0 f(t)\operatorname{sen}(t)\,dt}^{0}$$

$g'(0) = 0$ → derivada nula en punto

Análisis segunda derivada

sabemos $g''(x) + g(x) = f(x)$

$g''(x) = f(x) - g(x)$; $x=0$

$g''(0) = f(0) - g(0) > 0$

$= f(0) > 0$

$g(0) = 0$ mismo argumento.

tenemos condiciones necesarias para mín local!

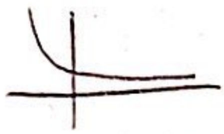
$$\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)\,dx}{1+x^2}\right| \le \frac{\pi}{12e}$$

$$\le \int_1^{\sqrt{3}} \left|\frac{e^{-x}\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}\right| dx$$

$$\le \int_1^{\sqrt{3}} \frac{|e^{-x}||\operatorname{sen}(x)|}{1+x^2}\, dx \qquad , \; |\operatorname{sen}(x)| \le 1$$

$$\le \int_1^{\sqrt{3}} \frac{|e^{-x}|}{1+x^2}\, dx$$

$e^{-1} > e^{-x}$, $x \in [1, \sqrt{3}]$



decreciente

$$\le \frac{1}{e}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{1}{e}\left(\operatorname{arctg}(x)\right)\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\pi}{12e}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$$

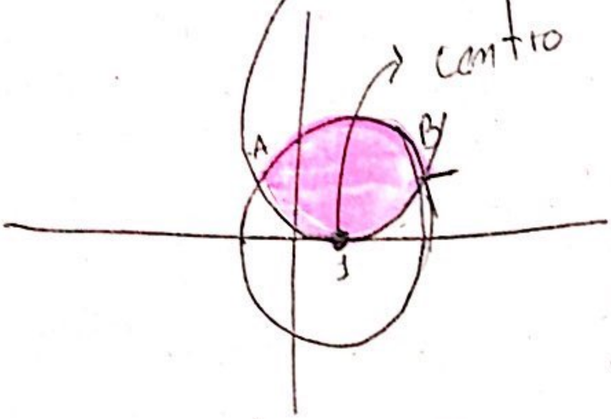
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Scanned with CamScanner

Sea R la región

$$\underset{①}{(x-1)^2+y^2=5} \qquad \underset{②}{y=2(x-1)^2}$$

centro $(1,0)$, radio $=\sqrt{5}$



a) área

b) rotación OX

c) rotación OY

a) Buscamos A y B para ver donde integrar

$$(x-1)^2 = 5-y^2 = \frac{y}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2y^2+y-10 = 2\left(y+\frac{5}{2}\right)(y-2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{y=-\frac{5}{2}}_{\text{no la considero pues trabajo sobre } x} \vee\ y=2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = \frac{\overset{y=2}{y}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=2 \Rightarrow \begin{array}{l} A=(0,2) \\ B=(2,2) \end{array}$$

Luego su area

$$A(R) = \int_0^2 |y_{\odot} - y_U| \, dx$$

Por que? esto es porque calculo la diferencia de imagenes, pero debo fijarme en las variables

$$= \int_0^2 \sqrt{5-(x-1)^2} - 2(x-1)^2 \, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{5-(x-1)^2} - 2 \int_0^2 (x-1)^2 \, dx$$

2 1

1 $\int_0^2 (x-1)^2 \, dx = \frac{(x-1)^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{1}{3} - -\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ //

2

Sea D la región entre 11 OCT 2018

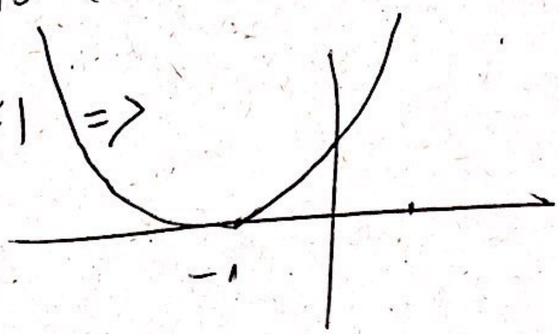
$(x-1)^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2$ / $y = 2(x-1)^2$

lo que podemos ver es lo que recordamos de intro!! si no tranquilos lo vemos ahora

Recordin # Saludines

si tengo algo directamente a la X lo que hace es lo contrario en el eje X.

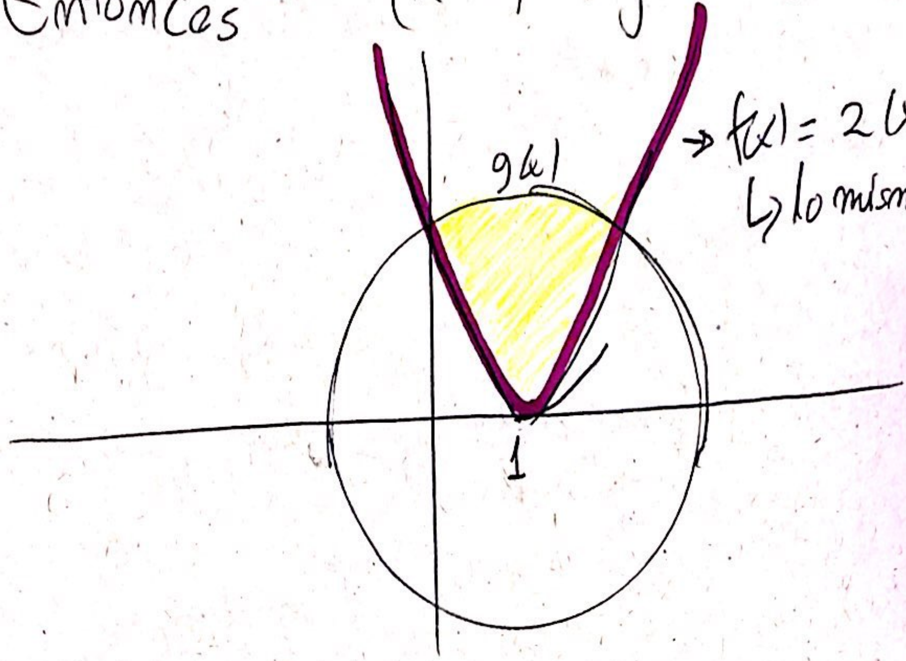
Ej $(x+1)^2 = f(x)$ =>



se traslada 1 unidad a la $\underbrace{\text{Izquierda}}_{\text{lo contrario a +1 po}}$

Entonces $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
es la circunferencia centrada en $(a,b) = C\odot$

Entonces $(x-1)^2 + y^2 = 5$



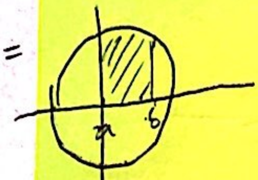
$\rightarrow f(x) = 2(x-1)^2$

↳ lo mismo

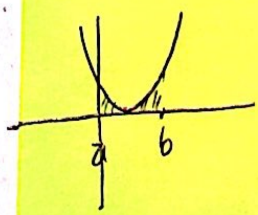
Centrado todo en (0,1) :)

I) Para sacar el área entre funciones

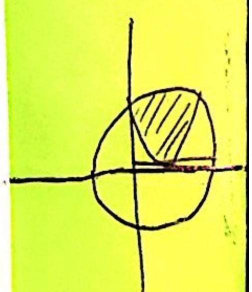
$$\int_a^b g(x)\,dx =$$



$$\int_a^b f(x)\,dx$$

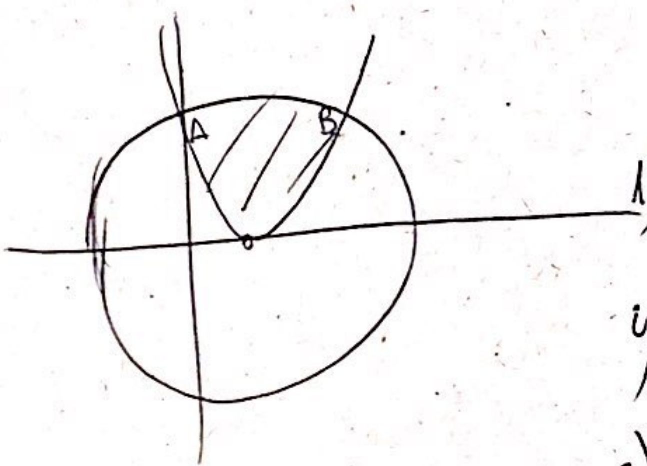


Entonces $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x) - f(x)\,dx =$



$$\int_A^B y_{\odot} - y_{\cup} \, dx$$

Entonces debemos buscar los límites de la integral



intersectamos

1) $(x-1)^2 + y^2 = 5$

2) $y = 2(x-1)^2$

$$1) \Rightarrow \underbrace{(x-1)^2 = 5 - y^2 = \frac{y}{2}}_{③}$$

$$③ \Rightarrow 0 = y^2 - 10 + y \Rightarrow 2\left(y + \frac{5}{2}\right)(y-2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{y = -\frac{5}{2}}_{\text{no está pues trabajo en el lado derecho!}} \vee y = 2$$

$(x-1)^2 + y^2 = 5$

Si $y = 2$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + 4 = 5$

$\Rightarrow x(x-2) = 0$

$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$

$A = (0, 2) \quad , \quad B = (2, 2) \rightarrow$ límites integral.

$$\int_0^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{circunferencia}}}{y_o} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{parábola}}}{y_u} \, dx = \int_0^2 \sqrt{5-(x-1)^2} - 2(x-1)^2 \, dx$$

tranf. lineal

$$\underbrace{\int_0^2 y_o - y_u \, dx}_{\text{PEDRO}} = \underbrace{\int_0^2 \sqrt{5-(x-1)^2} \, dx}_{\text{JUAN}} - \underbrace{2\int_0^2 (x-1)^2 \, dx}_{\text{DIEGO}}$$

PEDRO = JUAN + DIEGO

Juan ! $= \int_0^2 \sqrt{5-(x-1)^2}\,dx$

C.V $u = x-1$, $du = dx$ | lim $x=0 \Rightarrow u=-1$; $x=2 \Rightarrow u=1$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{5-u^2}\,du \quad ; \quad \text{pero} \quad \sqrt{5-u^2} = g(x)$$

g(x) es par // Probado en aux anterior

$$\Rightarrow 2\int_0^1 \sqrt{5-u^2}\,du \longrightarrow \text{forma general } a^2-u^2$$

$\boxed{a=\sqrt{5}}$

C.V $u = a\,\text{sen}(t)$, $du = a\cos(t)\,dt$

lim $u=0 \Rightarrow t=0$

$u=1 \Rightarrow 1 = a\,\text{sen}(t)$

$\Rightarrow \arcsin\left(\frac{1}{a}\right) = t$

En el intervalo es biyectiva.

$p = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)$

$$= 2\int_0^p \sqrt{5-5\,\text{sen}^2(t)}\,a\cos(t)\,dt$$

$$= 2\int_0^p \sqrt{5}\left(\sqrt{1-\text{sen}^2(t)}\right)\sqrt{5}\cos(t)\,dt$$

$$= 2\int_0^p 5\left(\sqrt{1-\text{sen}^2(t)}\right)\cos(t)\,dt = 10\int_0^p \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)\,dt$$

$$= 10\int_0^P \cos^2(t)\,dt = \text{JUAN.}$$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

$$2\operatorname{sen}(x)\cos(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$= \frac{10}{2}\int_0^P 1+\cos(2t)\,dt = \frac{10}{2}\left[\int_0^P dt + \int_0^P \cos(2t)\,dt\right]$$

$$\int \cos(2t) = \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2} + C$$

$$= 5((P)-0) + 5\left(\frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}\right)\Big|_0^P$$

$$= 5\left[(P) + \frac{\cancel{2}\operatorname{sen}(t)\cos(t)}{\cancel{2}}\Big|_0^P\right]$$

$$= 5\left[(P) + \operatorname{sen}(t)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(t)}\Big|_0^P\right]$$

$$= 5\left[P + \operatorname{sen}(P)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(P)} - \cancel{\operatorname{sen}(0)\sqrt{1-\operatorname{sen}(0)}}\right] \to 0$$

$P = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{a}\right)$; $\sin(x)$, $x \in [0, \pi]$ Biyectiva, $a = \sqrt{5}$

$$= 5\left[P + \operatorname{sen}\left(\arcsin\left(\frac{1}{a}\right)\right)\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{a}\right)\right)}\right]$$

$$= 5\left[\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{1-\frac{1}{5}}\right] = 5\left[\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{5}\right] //$$

Diego $= -2\int_0^2 (x-1)^2\,dx$

$x-1 = u$
$dx = du$
$x=0 \Rightarrow u=-1$
$x=2 \Rightarrow u=1$

$= -2\int_{-1}^{1} u^2\,du$ } PAR $f(x)=f(-x)$

$= -4\int_0^1 u^2\,du = -4\,\frac{u^3}{3}\Big|_0^1$

$= -\frac{4}{3} - \frac{0\cdot 4}{3} = \frac{-4}{3}$ //

Pedro = Juan + Diego

dos tenemos!

$= 5\arcsin\left(\frac{1}{a}\right) + \underbrace{2 - \frac{4}{3}}_{\frac{2}{3}} = 5\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{3}.$

Scanned with CamScanner

Rotación eje OX

$$\pi \int_0^2 y_{\odot}^2 - y_{\cup} \, dx$$

$$= \pi \int_0^2 \left(\sqrt{5-(x-1)^2}\right)^2 - \left(2(x-1)^2\right)^2 dx$$

$$= \pi \left(\int_0^2 \text{Roberta} + \int_0^2 \text{Pancrasio} \right)$$

$$\int_0^2 \text{Pancrasio} = \int_0^2 -4(x-1)^4 dx = -4 \left. \frac{(x-1)^5}{5} \right|_0^2 = -4\left(\frac{1}{5} - -\frac{1}{5}\right)$$

$$= -4 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{8}{5}$$

La vaca  Por qué mi vaca parece gato?

$$\int_0^2 \text{Roberta} = \int_0^2 5-(x-1)^2 dx = 5x \Big|_0^2 - \left. \frac{(x-1)^3}{3} \right|_0^2$$

$$= 10 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 10 - \frac{2}{3}$$

$$\pi \left(\int_0^2 \text{Roberta} + \int_0^2 \text{Pancrasio} \right) = \pi \left(\frac{116}{15} \right)$$

Rotación OY

$$2\pi\int_0^2 x\,(y_0 - y(\cdot))\,dx$$

$$= 2\pi\Bigg[\underbrace{\int_0^2 x\sqrt{5-(x-1)^2}\,dx}_{(1)} \underbrace{-2\int_0^2 x\,(x-1)^2\,dx}_{(2)}\Bigg]$$

(1) $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{5-(x-1)^2}\,dx =$ C.V $x-1=t$

$dx = dt$

$x=0 \Rightarrow t=-1$

$x=2 \Rightarrow t=1$

$$= \int_{-1}^1 (t+1)\sqrt{5-(t)^2}\,dt = \underbrace{\int_{-1}^1 t\sqrt{5-t^2}\,dt}_{\substack{\text{Es Impar!}\\ f(t)=-f(-t)\\ 0}} + \underbrace{\int_{-1}^1 \sqrt{5-t^2}\,dt}_{\substack{\text{Parte a)}:\\ \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\frac{2}{\pi}}}$$

$$= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2$$

Scanned with CamScanner

(2) $-2\int_0^2 x\cdot(x-1)^2\,dx = -2\int_0^2 x^3-2x^2+x\;dx$

$$= -2\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 - 2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 + \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right]$$

$$= -\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow V_{oy} = 2\pi\,[(1)+(2)]$ //

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl