MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2019, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 10: TFC-SUMAS-ÁREA

11 octaedro 2019

- Considere la región o área plana

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

- **[Rotación eje OX - Método del disco]**
  Dada la región R el volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OX será:

$$V = \int_a^b A(x) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

  Notar que esto viene a partir de sumar volúmenes de cilindros o discos de altura infinitesimalmente pequeña, cuya formula es

$$V_{cilindro} = \pi r^2 h$$

  Donde cada disco tiene $r = f(x)$ y $h = dx$.

- **[Rotación eje OY - Método de la cáscara]** Dada la región R, le agregamos la reestricción de que $0 \leq a < b$. El volumen generado al hacer rotar R en torno al eje OY será:

$$V = \int_a^b A(x) = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

  Notar que esto viene a partir de sumar cilindros huecos, los cuales se calculan de la siguiente forma.

  Dada el área sin tapas del cilindro, que se denomina área superficial de formula

$$A_{superficial} = 2\pi r h$$

  Si la multiplicamos por una profundidad infinitesimal dx, obtendremos el volumen de un cilindro hueco. Notamos que r es la distancia del eje de giro hasta el cilindro hueco.

  Por lo que reconocemos como $r = x$ (si el eje de giro es el eje OY) y $h = f(x)$.

P1. Calacule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{n^2 + (i-1)^2}$$

Indicación: Le puede ser útil pensar en sumas de Riemann.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. Considere la función definida por la regla

$$g(x) = sen(x) \int_0^x f(t)cos(s)dt - cos(x) \int_0^x f(t)sen(t)dt$$

Donde f es una función continua en $\mathbb{R}$.
Pruebe que $g''(x) + g(x) = f(x)$. Usando esto demuestre que si $f(0) > 0$ entonces g tiene un mínimo local en g.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P3. Demuestre que $\left|\int_1^{\sqrt{3}} \frac{e^{-x}sen(x)}{1+x^2}dx\right| \leq \frac{\pi}{12e}$

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P4. Sea D la región del primer cuadrante limitada por la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2=5$ y la parábola de ecuación $y=2(x-1)^2$(región bajo la circunferencia y sobre la parábola)

I Determine el área de la región D

II Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OX.

III Determine el volumen generado por sólido revolución en torno al eje OY.

1) Intuición:
2) Teoría:
3) Matraca:

IV Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Se define $G(x)=\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt$. Demuestre que $G''(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

P5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ con $f''(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$. Se define $G(x)=\int_x^{x+1}(x-t)f(t)dt$. Demuestre que $G''(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$. $(\overline{Propuesto})$

1. Intuición:
2. Teoría:
3. Matraca:

"No tengo frase, pero que les vaya bacan!"
Pato