

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Patricio Yáñez**Auxiliar 9: TFC y repaso Riemann**

4 de octubre de 2019

P1. Se define $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) dx$$

Demostrar que $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$, $\forall n \geq 2$

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P2. Sean $u, v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables y f una función continua y sea $G(x) = \int_{v(x)}^{u(x)} f(t) dt$.Muestre que $G'(x) = f(u(x))u'(x) - f(v(x))v'(x)$

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P3. Demostrar que:

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2}$$

No depende de x y Calcule su valor $\forall x > 0$

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P4. Estudia que ocurre con buena propiedad le entrega la paridad de una función para ser integrada, asumiendo que ya está bien definida, ¿Qué ocurre si la integro simétricamente?

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P5. Sea $f: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.I Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{i=1}^n f(i), \forall n \geq 2$$

II Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{(-n+1)} \leq n!, \forall n \geq 1$$

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

P6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a, b]$. Pruebe que si $\int_a^b f(t)dt = 0$ entonces $f(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$

- a) Intuición:
- b) Teoría:
- c) Matraca:

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable la función $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es continua.
- **TFC 1:** Si f es una función continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y $a \in I$, entonces $\forall x \in \text{int}(I)$:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x)$$

- **Corolario del TFC 1:** Si la función F , continua en I es una primitiva cualquiera de f en I , entonces:

$$\forall a, b \in I, \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

- **TFC 2:** Sea f integrable en (a, b) si existe una función tal que: $F' = f$ en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

- **Integración por Partes:** Sean f y g dos funciones continuas en $[a, b]$ y con derivadas continuas en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx$$

- **Integración por sustitución:** Sea g continua en $[a, b]$ y con derivada continua en (a, b) . Sea f continua en $g([a, b])$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

- **Valor Medio:** Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$. Se llama valor medio de f en $[a, b]$ a

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

Se anota como $\bar{f}$ o $\langle f \rangle$.

- **TVM-integrales:** Si f es continua en $[a, b]$, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que $f(\xi) = \langle f \rangle$, es decir:

$$\int_a^b f = f(\xi)(b-a)$$

- **TVM Generalizado - integrales:** Si f es continua en $[a, b]$ y g es integrable en $[a, b]$, que no cambia de signo, entonces $\exists \xi(a, b)$ tal que

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$$