MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2019, Primavera
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 8

03 Octubre 2019

Recuerdo:

- Sea $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo. El conjunto $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ es una *partición del intervalo* $[a,b]$ si $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Diremos que la norma de la partición P es:

$$|P| = \sup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \Delta x_i$$

donde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y denotamos al conjunto de todas las particiones de $[a,b]$ como $\mathcal{P}_{[a,b]}$.

Importante: notar que $(x_i - x_{i-1}) \leq |P|$

- Sea $P \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su suma superior e inferior como:

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad s(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

donde $M_i(f) = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ y $m_i(f) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

- Si $P, Q \in \mathcal{P}_{[a,b]}$ y $P \subseteq Q$ tenemos que:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definimos su integral superior e inferior como:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} S(f,P)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_{P\in\mathcal{P}_{[a,b]}} s(f,P)$$

- Diremos que una función es Riemann-Integrable (o simplemente integrable) si su integral superior e inferior coinciden. En dicho caso definimos la integral como:

$$\int_a^b f(x) = \overline{\int_a^b} f(x) = \underline{\int_a^b} f(x)$$

- **Criterio de Riemann:** f es integrable si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathcal{P}_{[a,b]}, S(f,P) - s(f,P) \leq \varepsilon$$

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada y monótona, entonces es integrable en $[a,b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es integrable en $[a,b]$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua o acotada y monótona, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} s(f,P) = \lim_{|P|\to 0} S(f,P)$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Donde $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

- Dos particiones comunes son la equiespaciada:

$$x_i = x_0 + i\Delta x = a + i\frac{b-a}{n}$$

y la geométrica: $x_i = aq^i = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^i$.

- Propiedades de la integral
  - $\int_a^b c = c(b-a)$
  - $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ si $f(x) \leq g(x)$ en todo $[a,b]$
  - $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

- **Segundo TFC:** Si f es integrable en $[a,b]$ y existe una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $F' = f$ en (a,b). Entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

P1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ derivable y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tales que

$$f'(x) + g(x)f(x) = 0$$

Usando definición de primitiva muestre que

$$\int g(x)dx = -\ln f(x) + C$$

a) Intuición: Primero me piden demostrar algo con un $ln(x)$ recordemos la definición de primitiva, y además cual la derivada de esta, y su integral, será esta función la que estoy trabajando? Eso es en un comienzo.
Me dan una igualdad, me puede ser conveniente el matraquearla y llegar a lo pedido.

b) Teoría: Las funciones deben estar bien definidas, no se debe anular una en particular, y deben ser integrables y derivables respectivamente.

c) Matraca: Ordenar lo que me dan sin matar gatitos, en realidad no es mucha.

P2. *a*) Considerando la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ demuestre que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right)$$

b) Demuestre que

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = ln(b) - ln(a)$$

, donde $0 < a < b$
<u>Indicación:</u> Considere la partición $x_i = aq^i, i = 0, 1, \ldots, n$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca

P3. Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

I Usando la partición $P = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i), \; \forall n \geq 2$$

II Considere $f(x) = ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que

$$(n-1)! \leq n^n e^{(-n+1)} \leq n!, \; \forall n \geq 1$$

P4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y no negativa en $[a, b]$. Pruebe que si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = 0$ entonces $f(t) = 0$, para todo $t \in [a, b]$

"Studies show owning a ladder is more dangerous that a loaded gun. That's why I own ten guns, just in case some fool tries to sneak in here with a ladder."
Stan Pines