

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral 2019, Primavera

Profesor: Leonardo Sánchez C.

Auxiliar: Patricio Yáñez

Correo: pyanez@dim.uchile.cl



Auxiliar XX: Su pancito?blanco o integral?

27 Septiembre[Las dudas deben ser dichas en paya] 2019

Recuerdo:

- **[Primitiva]** Una función F continua en un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y derivable en $\text{int}(I)$ (el interior de I), se llama primitiva de una función f sobre I si y sólo si

$$\forall x \in \text{int}(I), \quad F'(x) = f(x)$$

Si F es una primitiva de f , entonces $F + c$ es otra primitiva de f para cualquier $c \in \mathbb{R}$

- Es muy importante notar lo siguiente

- $\int f'(x)dx = f(x) + c$
- $\frac{d}{dx} (\int f(x)dx) = f(x)$
- $\int f \pm g = \int f \pm \int g$
- $\int (\lambda f) = \lambda (\int f)$

- **[Cambio de Variable]** si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

- **[Integración por Partes]** Sean u y v dos funciones de x , entonces:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

o, equivalentemente $\int uv' = uv - \int u'v$

o, de manera compacta $\int u dv = uv - \int v du$

- **[Sustituciones trigonométricas]** Se recomiendan los siguientes cambios de variables

- para $a^2 + x^2$, usar $x = a \tan(v)$ o $x = a \sinh(v)$
- para $a^2 - x^2$, usar $x = a \sin(t)$ o $x = a \cos(t)$
- para $x^2 - a^2$, usar $x = a \sec(v)$ o $x = a \cosh(v)$

obs: notar que da lo mismo si se escoge v o t

- **[Fracciones parciales]:** si se tiene $\frac{P(x)}{Q(x)}$ con $\text{gr}(Q) > \text{gr}(P)$ se aconseja expresar $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en suma de fracciones.

- Sea $R(\cos(x), \sin(x))$ una fracción, donde tanto numerador y denominador solo contiene $\sin(x)$ y $\cos(x)$. Si se desea integrar se aconseja el cambio de variable $t = \tan(x/2)$.

P1. Calcule primitivas:

a) $\int \cos^5(x)dx$

b) $\int (x-1)\sqrt{x+4}dx$

c) $\int \frac{dx}{x - x^{\frac{3}{5}}}$

d) $\int \frac{e^{3x}}{1 + e^{2x}}dx$

e) $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$

P2. Resuelva usando integración por partes

a) $\int x^2 e^x dx$

b) $\int \cos(\ln(x)) dx$

P3. Generalización Integración por partes Este ejercicio busca que busquemos un método de hacer integración por partes, pero sin importar la cantidad de veces que deba iterar el proceso. En este caso ¿Cómo puedo escribirlo? (Porpuesto)

P4. Resuelva usando fracciones parciales

a) $\int \frac{dx}{1-x^2}$

b) $\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$

P5. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ derivable y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tales que

$$f'(x) + g(x)f(x) = 0$$

Usando definición de primitiva muestre que

$$\int g(x) dx = -\ln f(x) + C$$

P6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ derivable y tal que $\int f(x) dx = f(x)$

a) Muestre que $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$ y deduzca que $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = x + C$

b) Concluya que $f(x) = e^{x+C}$

Primitivas conocidas:

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \forall \alpha \neq -1$

7. $\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sqrt{1-x^2} + C$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

8. $\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$

3. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$

9. $\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$

4. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$

10. $\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$

5. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

11. $\int \operatorname{cosec}^2(x) dx = \cotg(x) + C$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + C$

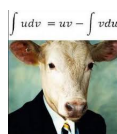


Figura 1: Un día vi una vaca sin cola vestida de uniforme.