MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 6: Preparación para el control

13 de Septiembre 2019

Resumen:

No hay nueva materia que resumir, sin embargo, estos son los conceptos con los que deben estar 100 % familiarizados y las preguntas que deberían saber responder conceptualmente:

- Sucesiones, subsucesiones. Propiedades de convergencia asociadas a las subsucesiones.
- Concepto de continuidad de una función. ¿Cómo manejar funciones definidas por partes?
- Concepto de continuidad uniforme, ¿cuál es la diferencia principal con la continuidad usual?
- Derivadas, definición, cálculos. ¿Cuándo se usa la fórmula y cuándo la definición?
- Reglas de derivación, suma, producto, división, regla de la cadena. Derivadas de polinomios, trigonométricas, exponenciales.
- ¿Cómo se relaciona ser derivable con ser continua? ¿La relación funciona hacia ambos lados?
- Teorema de los Valores Intermedios, ¿cuál es su gracia?, ¿cómo debe usarse?, ¿como NO debe usarse?
- Teorema del Valor Medio, ¿cómo se usa?, mismas preguntas que para el TVI.
- Optimización. ¿Cómo obtengo candidatos? ¿Siempre los puntos críticos son el óptimo?
- Concepto de máximo/mínimo local. ¿Cómo asegurar que un punto es máximo/mínimo local? ¿Ser máximo local implica ser el valor más grande posible de la función?
- Análisis de funciones. Toda la parte de Intro al Cálculo: dominio, ceros, paridad, asíntotas.
- Crecimiento de funciones y su relación con la derivada.
- Concavidad de funciones y su relación con la segunda derivada. Regla para máximos/mínimos/inflexión.
- L'Hopital, ¿cuándo y cómo se aplica?
- Desarrollo de Taylor, ¿cómo se obtiene el polinomio de Taylor? ¿qué significado tiene el polinomio? ¿para qué se usa?

P1. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \ln(x)}{x-1} & \text{si } x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

a) Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}_+^*$.

b) Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcúlela.

c) Determine los puntos de continuidad de f' en $]0, \infty[$.

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. Sea $f(x)$ una función diferenciable, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)' = 0$ muestre que la función debe ser necesariamente constante.

a) Intuición:Contradicción!
b) Matraca:
c) Teoría

P3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f \in \mathcal{C}^2$ y sea $a \in \mathbb{R}$ determine:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) + f(a-h) - 2f(a)}{h^2}$$

a) Intuición:Taylor
b) Matraca:
c) Teoría

P4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con $f(2) = 0$. Se define la función. $C(x) = (x-1)^2 f(x)$. Aplicar el valor medio adecuadamente para probar que $\exists \xi \in (1,2)$ tal que $C''(\xi) = 0$

a) Intuición:TVM
b) Matraca:
c) Teoría

P5. Sea $n \in \mathbb{N}$, Considere la siguiente función:

$$\mathcal{Z}(x) = \frac{x^n (1-x)^n}{n!}$$

a) Identifícala como un polinomio.
b) ¿Es esta función uniformemente continua en el intervalo (0,1)?
c) Demuestre que f es derivable en cada punto de su domino y calcule su derivada.
d) Encuentre el máximo de la función en el intervalo [0.1], justificando por qué es el máximo.

P6. Sea la función $f(x) = \dfrac{ln(x)}{\sqrt{x}}$, con dominio $\mathbb{R}^+$, $\mathcal{Z}(x) = \{1\}$, negativa si $x \in (0,1)$, positiva si $x \in (1,\infty)$. Luego justifique su continuidad, para poder hacer su estudio cuando $x \to 0 \wedge x \to \infty$, a partir de esto calcule su derivada y crecimiento, donde concluya si hay máximos o mínimos, si es que existen, además estudie convexidad.

P7. TVI(PROPUESTO) Demuestre que existe solución en:

a) Sea la función $f(x) = x^{13} + 7x^3 - 5$. Demuestre que es continua y que existe un único real $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = 0$
b) Demuestre que la ecuación $x^3 = 2^x$ tiene solución.
c) Demuestre que la solución de $x + 1 - \dfrac{2}{x} - \dfrac{3ln(x)}{x} = 0$ es identicamente 1