MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo:pyanez@dim.uchile.cl

Resumen C1-Estudio Sucesiones-funciones-derivación-optimización

4 Agosto 2019

- Una **sucesión** es una función

$$\begin{aligned} s\colon \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto s(n) = s_n \end{aligned}$$

- $s_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - \ell| \leq \varepsilon$
- (s_n) se dirá acotada si $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |s_n| \leq M$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\varphi : N \to N$ una función *estrictamente creciente*. Se llama **subsucesión** de s_n generada por φ, a la sucesión $s_{\varphi(n)}$
- Sea (s_n) una sucesión y sea $\ell \in \mathbb{R}$. Entonces

$$s_n \to \ell \iff \textit{Todas las subsucesiones de } (s_n) \textit{ convergen a } \ell$$

- **Teorema de Bolzano - Weiestrass**
  Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente
- **Función continua en un punto**
  Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. Diremos que f es una **función continua** en $\overline{x}$ si

$$\forall (x_n) \subseteq A, x_n \to \overline{x} \Longrightarrow f(x_n) \to f(\overline{x})$$

- **Caracterización** $\varepsilon - \delta$
  Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\overline{x} \in A$. f es continua en $\overline{x}$ si y solo si se cumple que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in A$

$$\{|x - \overline{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\overline{x})| \leq \varepsilon\}$$

- **Álgebra de funciones continuas**
  Sean $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{x} \in A \cap B$. Luego $f \pm g, \lambda f$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ con $g(\overline{x}) \neq 0$. Además la composición de continuas es continua
- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f es continua $\forall \overline{x} \in A$, diremos que f es continua.
- **[TVI o Bolzano]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Entonces existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.
- **[TVI-Generalizado]** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Si $c, d \in f([a, b])$. Entonces $\forall x_0 \in [c, d], \exists \overline{x} \in [a, b]$ tal que $f(\overline{x}) = x_0$

- **[Teorema de Weierstras]**
  Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo en $[a, b]$.

- Sea $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y estrictamente monótona (creciente o decreciente) con I un intervalo. Entonces $J = f(I)$ es un intervalo y la inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua.

- **[Continuidad Uniforme]**
  Una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice uniformemente continua si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

  $$(\forall x, y \in A) \quad |x - y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

  Es decir, f será uniformemente continua si δ únicamente depende de ε y no del eventual $\overline{x}$ que puedo estudiar.

- Toda función uniformemente continua es continua.

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con A cerrado y acotado. Entonces f es uniformemente continua si y sólo si es continua en todo punto $\overline{x} \in A$

- Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto $\overline{x} \in (a, b)$, si existe el limite

  $$\lim_{x \to \overline{x}} \frac{f(x) - f(\overline{x})}{x - \overline{x}}$$

  Equivalentemente, f es derivable en $\overline{x}$ si existe $m = f'(\overline{x})$ tal que $f(x) = f(\overline{x}) + f'(\overline{x})(x - \overline{x}) + o(x - \overline{x})$

- Si f es derivable en $\overline{x}$ entonces es continua en $\overline{x}$

- **[Álgebra de derivadas]** Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivables en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces:

  1. $f \pm g$ es derivable en $\overline{x}$ con
     $$(f \pm g)'(\overline{x}) = f'(x) \pm g'(x)$$
  2. $f \cdot g$ es derivable en $\overline{x}$ con
     $$(f \cdot g)' = f'(\overline{x})g(\overline{x}) + f(\overline{x})g'(\overline{x})$$
  3. Si $g(\overline{x}) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en $\overline{x}$ con
     $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(\overline{x})g(\overline{x}) - f(\overline{x})g'(\overline{x})}{g^2(\overline{x})}$$

- **[Regla de la cadena]**
  Sean $f : (a, b) \to (c, d)$ derivable en $\overline{x} \in (a, b)$ y $g : (c, d) \to \mathbb{R}$ derivable en $\overline{y} = f(\overline{x}) \in (c, d)$. Entonces $g \circ f$ es derivable en $\overline{x}$ con

  $$(g \circ f)'(\overline{x}) = g'(f(\overline{x})) \cdot f'(\overline{x})$$

  Tambien se puede usar la notación de leibniz obteniendo $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$ donde $y = y(u)$ y $u = u(x)$, es decir y depende de u y u depende de x.

- **[Derivada de la función inversa]** Sea $f:(a,b)\to(c,d)$ biyectiva y continua. Si f es derivable en $\overline{x}\in(a,b)$ con $f'(\overline{x})\neq 0$, entonces la función inversa $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ es derivable en $\overline{y}=f(\overline{x})\in(c,d)$ con
$$(f^{-1})'(\overline{y})=\frac{1}{f'(\overline{x})}=\frac{1}{f'(f^{-1}(\overline{y}))}$$
Analogamente $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ donde $y=y(x)$ y $x=x(y)$

- **[Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de $(f\cdot g)$ está dada por:
$$(f\cdot g)^{(n)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}(a)\cdot g^{(n-k)}(a)$$

Derivadas conocidas

1. $(c)'=0$
2. $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$
3. $(\ln(x))'=\dfrac{1}{x}$
4. $(\sinh(x))'=\cosh(x)$
5. $(\cosh(x))'=\sinh(x)$
6. $(e^x)'=e^x$
7. $(\sin(x))'=\cos(x)$
8. $(\cos(x))'=-\sin(x)$
9. $(\tan(x))'=\sec(x)^2$
10. $(\arcsin(x))'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\arccos(x))'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $(\arctan(x))'=\dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(a^x)'=a^x\ln(a)$
14. $(\log_a(x))'=\dfrac{1}{x\ln(a)}$

- Sea $f:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Diremos que $\overline{x}$ es mínimo local de la función f si existe $\varepsilon>0$ tal que
$$f(\overline{x})\leq f(x)\quad\forall x\in(\overline{x}-\varepsilon,\overline{x}+\varepsilon)$$
Es decir, llamaremos a $\overline{x}$ como mínimo local si $f(\overline{x})$ es el menor valor en alguna vecindad. Notar que con esto, pueden existir muchos mínimos locales.

- **[Máximos y Mínimos]** Si $\overline{x}\in(a,b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, entonces $f'(\overline{x})=0$

- **[TVM]** Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), con $g(b)\neq g(a)$ y $g'(x)\neq 0$ para todo $x\in(a,b)$. Entonces, existe $c\in(a,b)$ tal que
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$
En particular, si $g(x)=x$ se tiene que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

- **[L'Hopital]** Sean $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivables tales que:
$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$$
Donde $L=0$ o $L=\infty$. Luego:
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se tiene lo siguiente
  - Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente.
  - Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente.
- **[Convexidad]** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si las rectas secantes al gráfico de la función quedan por encima del gráfico, vale decir. $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que

  $$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$

  o equivalentemente

  $$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

- Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b). En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f'' \geq 0$.
- **[Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente
- **[Desarrollo limitado]** Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ posee un desarrollo limitado, que no es más que una aproximación polinomial, de orden k en torno al punto $\overline{x} \in (a, b)$ si existen constantes $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

  $$f(x) = a_0 + a_1(x - \overline{x}) + \cdots + +a_k(x - \overline{x})^k + o((x - \overline{x})^k)$$

  Donde $o(\cdot)$ es un error de aproximación y es tal que $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{o(u^k)}{u^k} = 0$.
  Usando el cambio de variables $h = x - \overline{x}$, el desarrollo limitado queda

  $$f(\overline{x} + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_k h^k + o(h^k)$$

- Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ k-veces derivable en $\overline{x} \in (a, b)$, y sea

  $$T_f^k(h) := f(\overline{x}) + f'(\overline{x})h + \frac{f''(\overline{x})}{2}h^2 + \cdots + \frac{f[k](\overline{x})}{k!}h^k$$

  Su desarrollo de Taylor de orden k en torno a $\overline{x}$. Entonces

  $$f(x) = T_f^k(h) + o((x - \overline{x})^k)$$

  con $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{o(h^k)}{h^k} = 0$
- **[Punto critico]** Diremos que x_* es punto critico de una función diferenciable f si se cumple que $f'(x_*) = 0$.
- **[Clases C^k]** Diremos que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^k(a, b)$ si es $k-$veces derivable en todo (a, b) y la función $f^{[k]} : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua. Es decir, en la practica $f \in C^k(a, b)$ ssi
  f es k-veces derivable y la derivada k-esima es continua.

  Si lo anterior es cierto para todo $k \in \mathbb{N}$ diremos que f es de clase C^∞

- Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, k-veces derivable en $\overline{x}\in(a,b)$, con $f'(\overline{x})=\cdots=f^{[k-1]}(\overline{x})=0$ y $f^{[k]}\neq 0$, $k\geq 2$. Entonces hay 3 casos posibles:
    1. Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x})>0$, entonces $\overline{x}$ es un minimo local
    2. Si k es par y $f^{[k]}(\overline{x})<0$, entonces $\overline{x}$ es un maximo local
    3. Si k es impar, $\overline{x}$ es un punto de inflexión, es decir, es un punto en donde la función cambia su concavidad
- Sea $x_0\in(a,b)$ y $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función de C^2. Si $f'(x_0)=0$, existen 3 posibilidades:
    1. $f''(x_0)>0$, entonces x_0 es mínimo local.
    2. $f''(x_0)<0$, entonces x_0 es máximo local.
    3. $f'''(x_0)\neq 0$ se puede concluir que x_0 es un punto de inflexión.
- [**Asíntotas**] 3 tipos (estudiar independiente hacia $+\infty$ o $-\infty$)
    1. Horizontal: $y=c$, calcular $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=c$.
    2. Vertical: $x=a$, encontrar a tal que $\lim\limits_{x\to a} f(x)\to\pm\infty$.
    3. Oblicuas: $y=mx+n$, donde $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)-mx$
- [**Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor**]
  Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a,b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x}\in(a,b)$. Entonces, para todo $x>\overline{x}$ (respectivamente $x<\overline{x}$) existe $\xi\in(\overline{x},x)$ (respectivamente $\xi\in(x,\overline{x})$ tal que:

  $$f(x)=T_f^k(x-\overline{x})+\frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x-\overline{x})^{k+1}$$

  Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$

"El trabajo tesonero todo lo vence"
Pa la laif