MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral
Profesor: Leonardo Sánchez C.
Auxiliar: Patricio Yáñez
Correo:pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 5: Aplicaciones de Derivadassssss(El regreso)

30 Agosto 2019

- Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Se tiene lo siguiente
  - Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente.
  - Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente.

  Análogo para estrictamente creciente/decreciente
- **[Convexidad]** Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que
$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right](z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$
  o equivalentemente
$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$
- Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b). En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f'' \geq 0$.
- **[Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente
- **[Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]** Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $(k+1)$-veces derivable en todo punto del intervalo (a, b). Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de taylor de orden k en $\overline{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \overline{x}$ (respectivamente $x < \overline{x}$) existe $\xi \in (\overline{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \overline{x})$ tal que:
$$f(x) = T_f^k(x - \overline{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!}(x - \overline{x})^{k+1}$$
  Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$
- **[Fórmula de Leibnitz]** Para f y g funciones con derivadas de orden n en a, la derivada de orden n de $(f \cdot g)$ está dada por:
$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

P1. Analizar completamente la función $f(x) = (1 + x)e^{\frac{1}{x}}$ incluyendo:

a) Dominio, paridad, signos y ceros

b) Determine limites laterales en $x = 0$ y continuidad ¿Es reparable?

c) Determine asíntotas

d) Estudie crecimiento y concavidad

e) Dibuje el gráfico indicando puntos importantes

a) Intuición:

b) Teoría:

c) Matraca:

P2. *a)* Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables que verifican lo siguiente:
$$g(x) = xf(x) + 1, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x + y) = g(x)g(y), \qquad f(0) = 1$$

1) Demuestre que $g'(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2) Demuestre que $\forall n \geq 1$, $g(x) = xf^{(n)}(x) + nf^{(n-1)}(x)$ y calcule $f^{(n)}(0)$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Demuestre que:

$$\lim_{\delta \to 0} \left(\frac{f(x + x\delta)}{f(x)} \right)^{1/\delta}$$

existe, es positivo y calcúlelo.

a) Intuición:

b) Matraca:

c) Teoría

P3. **[Taylor derivado]**$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivable, tal que $f(x) + f''(x) = 0$, $\forall x \mathbb{R}$. Pruebe que es n veces derivable, y que si sabemos de antemano $f(0) = f(0) = 0$ debe ser la función nula.

a) Intuición:

b) Matraca:

c) Teoría

Propuestos

1. A desarrollar:
Estudiar completamente la función definida por

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3ln(x)}{x}$$

2. A desarrollar x2
Considere la función $f(x) = (x+1)ln\left(\left|\frac{x+1}{x}\right|\right)$, definida en $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

a) Encuentre ceros y signos de f

b) Estudie las asíntotas horizontales de f. Encuentre los limites laterales cuando $x \to 0^{\pm}$ y $x \to -1^{\pm}$ y ya sea, repare la función para que ea continua, o biem, detecte si hay asíntotas verticales.

c) Use el teorema de valor medio en la función auxiliar $g(x) = ln(|x|)$ en el intervalo $[x, x+1]$ para probar que

$$\frac{1}{x+1} < ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$$

d) Calcule la primera derivada de f. Use el resultado de la parte anterior para concluir sobre el crecimiento de f en $(-\infty, -1)$ y en $(0, \infty)$

e) Calcule $f''(x)$ e indique los intervalos donde f es cóncava y donde es convexa

f) Estudie los limites de $f'(x)$ cuando $x \to -1^{+}$ y cuando $x \to 0^{-1}$. Usando el signo de la segunda derivada en $(-1, 0)$ concluya sobre la monotonía de f' en dicho intervalo y pruebe que existe un único punto donde $f'(x) = 0$. Bosqueje el gráfico de f

"It is not the task of the University to offer what society asks for, but to give what society needs."
Edsger W. Dijkstra