

MA1002-4 Cálculo Diferencial e Integral**Profesor:** Leonardo Sánchez C.**Auxiliar:** Patricio Yáñez**Corre corre corazón?Correo =)** pyanez@dim.uchile.cl**Auxiliar 4: Aplicaciones de Derivadasssss**

23 Agosto 2019

- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $\bar{x}$ es mínimo local de la función f si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \forall x \in (\bar{x} - \varepsilon, \bar{x} + \varepsilon)$$

Es decir, llamaremos a $\bar{x}$ como mínimo local si $f(\bar{x})$ es el menor valor en alguna vecindad. Notar que con esto, pueden existir muchos mínimos locales.

De manera análoga se define el máximo local

- [Máximos y Mínimos]** Si $\bar{x} \in (a, b)$ es mínimo local o máximo local de una función derivable $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, entonces $f'(\bar{x}) = 0$
- [Teorema de Rolle]** Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Luego existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
- [TVM]** Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b) , con $g(b) \neq g(a)$ y $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

En particular, si $g(x) = x$ se tiene que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

- [L'Hopital]** Sean $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivables tales que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

Donde $L = 0$ o $L = \infty$. Luego:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- [Asíntotas]** 3 tipos (estudiar independiente hacia $+\infty$ o $-\infty$)

1. Horizontal: $y = c$, calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$.

2. Vertical: $x = a$, encontrar a tal que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \pm\infty$.

3. Oblicuas: $y = mx + n$, donde $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Se tiene lo siguiente

- Si $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es creciente.
- Si $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$, entonces f es decreciente.

Análogo para estrictamente creciente/decreciente

- [Convexidad]** Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si $\forall x, y \in [a, b], x < y$ se tiene que

$$f(z) \leq f(x) + \left[\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right] (z - x), \quad \forall z \in (x, y)$$

o equivalentemente

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

- Una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) . Entonces f es convexa en $[a, b]$ si y sólo si f' es creciente en (a, b) . En el caso de que f' sea diferenciable, notamos que f sera convexa si $f'' \geq 0$.
- [Concavidad]** f se dirá cóncava si $-f$ es convexa. Por lo tanto, en el caso de que f sea diferenciable se estudiará si f' es decreciente
- [Error $o(\cdot)$ en Desarrollo de Taylor]**
Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $(k+1)$ -veces derivable en todo punto del intervalo (a, b) . Sea $T_f^k(\cdot)$ el polinomio de Taylor de orden k en $\bar{x} \in (a, b)$. Entonces, para todo $x > \bar{x}$ (respectivamente $x < \bar{x}$) existe $\xi \in (\bar{x}, x)$ (respectivamente $\xi \in (x, \bar{x})$) tal que:

$$f(x) = T_f^k(x - \bar{x}) + \frac{f^{[k+1]}(\xi)}{(k+1)!} (x - \bar{x})^{k+1}$$

Es decir, se encontró una expresión para el error $o(\cdot)$

A partir de esta auxiliar trabajaremos bajo la nomenclatura que he estado trabajando algunos semestres siendo auxiliar, esta será definir en un comienzo (Intuición/Matraca/Teoría) esto permitirá aterrizar más el trabajo que realizaremos, y luego poder calificarlo desde +1 hasta +3 con enteros!(+1,+2,+3). Donde ustedes definirán la dificultad y luego les comentaré la mía, donde les diré su nivel de importancia.[Espacios para que ustedes llenen lo más importantes y tengan una mejor visión al enfrentar el ejercicio de nuevo]

P1. Pruebe que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que:

I

$$|\cos(x) - \cos(y)| \leq |x - y|$$

II Es uniforme continua[Matraca?]

a) Intuición:

b) Matraca:

c) Teoría:

Análisis posterior (si dá el tiempo o tarea personal preguntable a mi correo!). Sea $f(x) = \frac{1}{x}$, debo ver mi dominio!, que pasa con la teoría? si tomo el intervalo $\forall x, y \in [\varepsilon, a]$, si analizo $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varepsilon, a]^x$?. Siempre a fue fijo y real hasta la muerte. AA

P2. Calcular

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$$

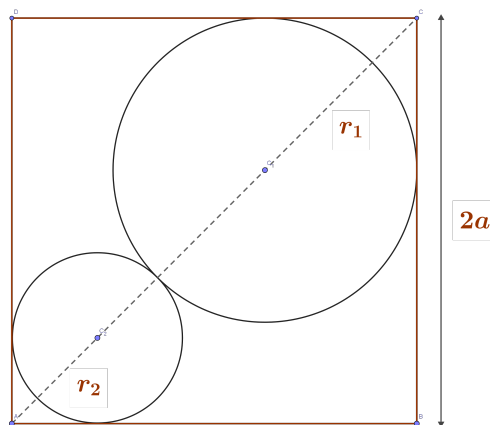
a) Intuición:

b) Matraca:

c) Teoría:

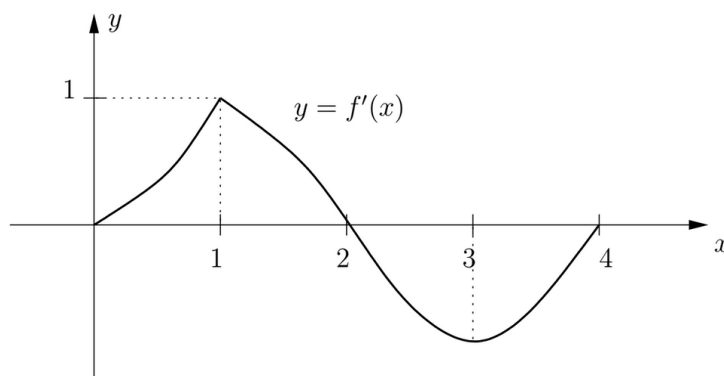
P3. [Optimización]

- a) Considere un triángulo isósceles, donde el largo de los lados iguales es L y θ es el valor del ángulo entre los lados iguales. ¿Cuál es el valor de θ que maximiza el área del triángulo?
- b) En un cuadrado de lado $2a$ se inscriben dos circunferencias de radios r_1 y r_2 , centradas en la diagonal del cuadrado, tangentes entre si y ambas tangentes al cuadrado.
 - 1) Encuentre una relación entre r_1 y r_2
 - 2) Determine los valores de r_1 y de r_2 de modo que la suma de las áreas de los círculos sea máxima. Justifique



- a) Intuición:
- b) Matraca:
- c) Teoría:

P4. Se sabe que un bosquejo del gráfico de la derivada de una función $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ es el dado en la figura siguiente. Además se sabe que $f(0) = 1$



Usando esta información encuentre el gráfico aproximado de la función f . Debe indicar precisamente en que intervalos f es creciente, decreciente, cóncava o convexa, además donde alcanza su máximos y mínimos locales o globales y donde tiene sus inflexiones. Debe probar además que f es acotada superiormente por 3 (use TVM)

- a) Intuición:
- b) Matraca:
- c) Teoría:

SIN PROPUESTOS

“Con el sueño haz de ser moderado, porque quien no madruga con el sol, no goza del día..”
Don Quijote de la Mancha-Miguel de Cervantes